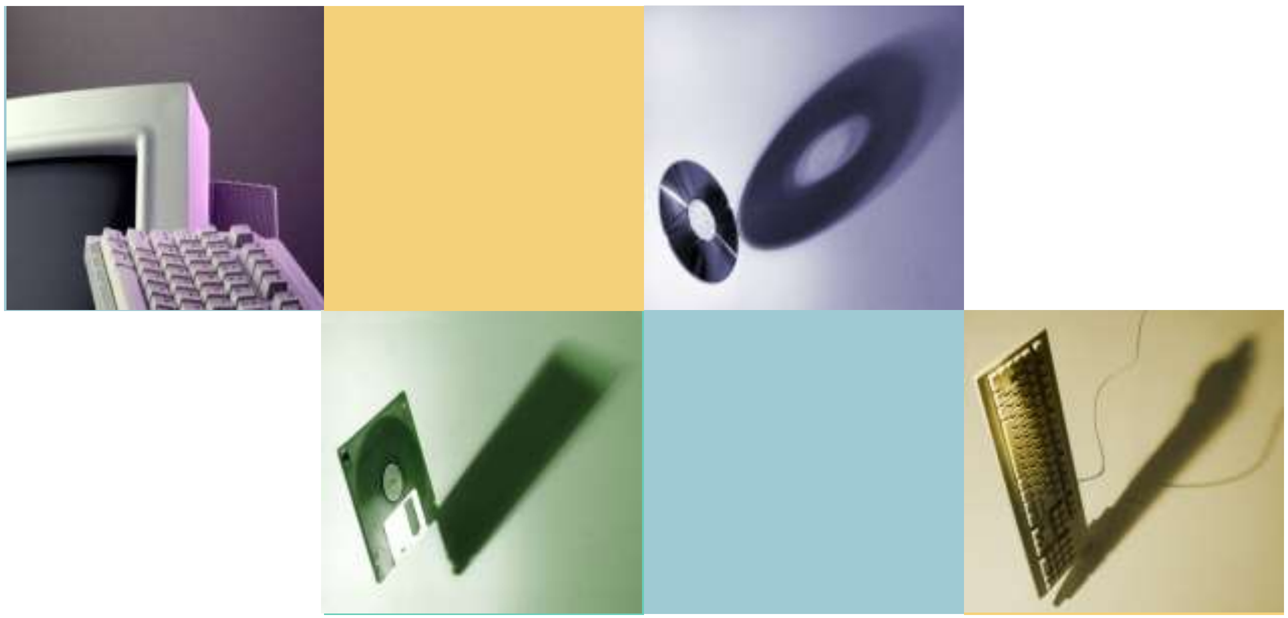
Lección 3.3



La Función Cuadrática

Actividades 3.3

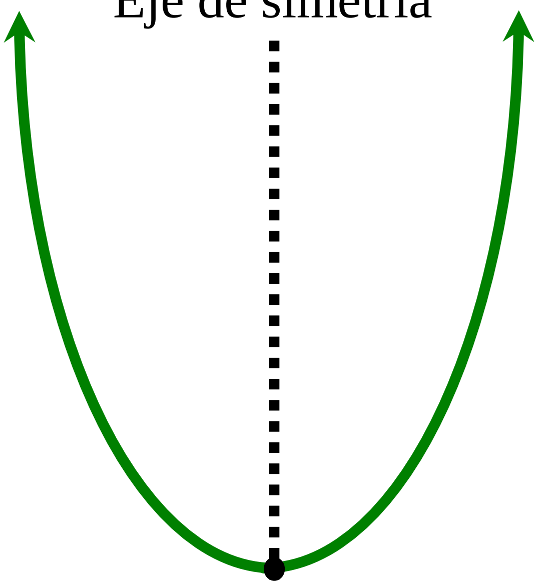
- **Referencias:**
  - Sección 3.1 – Funciones Cuadráticas: Ejercicios de Práctica Impares 5-8; 9-23 parta a solamente, 25-33 (impares solo parte a y c de cada uno); 35, 37, 51, 53, 54
- Referencias:
  - Math2me.com –
    - Grafica de una función cuadrática
    - Graficar Funciones Cuadráticas
    - Valor Máximo o Mínimo de funciones Cuadráticas

Función cuadrática

- Una **función cuadrática** es una función de la forma:

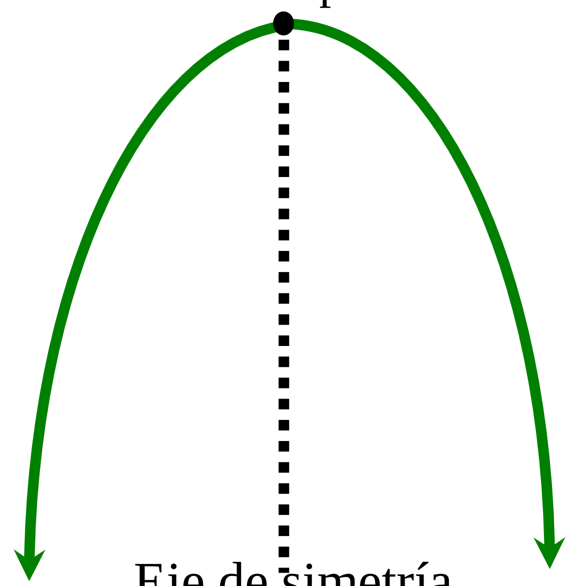
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- a, b, c son números reales, a distinto de cero (**Forma General**).
- Dominio de la función es el conjunto de los Números Reales
- La gráfica es una parábola



$a > 0$

Abre hacia arriba



$a < 0$

Abre hacia abajo

Si el vértice es: (h, k)

donde: $h = -\dfrac{b}{2a}$

$k = f(h)$

El eje de simetría es:

$x = h$

Ejemplo 1

Determine la dirección que abre la gráfica de la función cuadrática siguiente. Identifique su vértice, su eje de simetría y el valor máximo o mínimo de la función $f(x) = 2x^2 + 12x + 5$

$a = 2, b = 12, c = 5$

Si $a > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba y la función tendrá un valor mínimo.

El vértice:

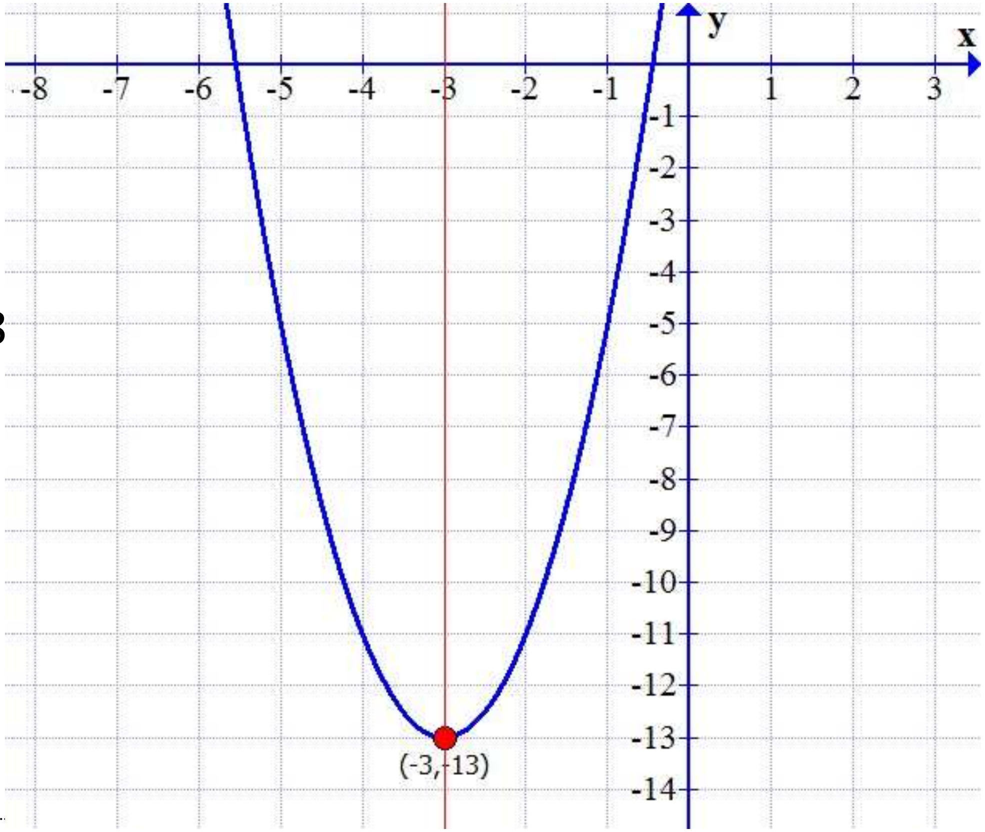
$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(12)}{2(2)} = -3$$

$$f(h) = 2(-3)^2 + 12(-3) + 5 = -13$$

Vertice: (-3, -13)

Eje de simetría es $x = -3$

El valor mínimo de la función es -13
y ocurre en x = -3



La forma del vértice de la función cuadrática

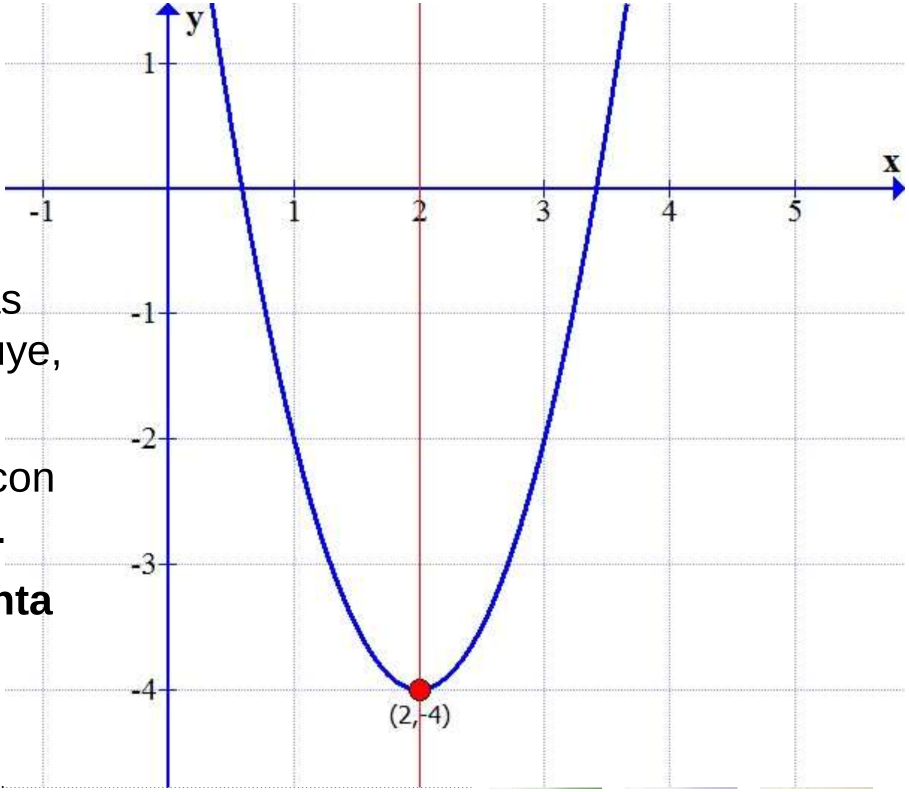
Si f es una función cuadrática con vértice (h, k) entonces se puede expresar de la forma: $$f(x) = a(x-h)^2+k$$

Ejemplo:
Encuentre el vértice y el eje de simetría de la gráfica de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = 2(x-2)^2-4}$. Luego, haga un bosquejo de su gráfica.

$h = 2 \quad k = -4$

Vertice: (2, -4)

Eje de simetría es $x = 2$



Ejemplo:
Describa la gráfica de la función usando las siguientes palabras: eje, aumenta, disminuye, rango, máximo o mínimo.

La gráfica de la función **es una parábola** con eje de simetría en $x = 2$ y vértice en (2,-4).

La función **disminuye en** $(-\infty, 2)$ y **aumenta en** el intervalo $(2, \infty)$.

Su **rango** es: $[-4, \infty)$.

Ejemplo 2

- Halla la función cuadrática con vértice $(3, -2)$ e intercepto x en 4.
- Solución: En la forma de vértice …

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = a(x - 3)^2 + (-2)$$

$$f(x) = a(x - 3)^2 - 2$$

Por tener intercepto x en 4, este es el punto $(4{,}0)$ le pertenece:

$$0 = a((4) - 3)^2 - 2$$

$$0 = a - 2$$

$$2 = a$$

$$\boldsymbol{f(x) = 2(x-3)^2 - 2}$$

ó

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x + 16}$$

Ejemplo 3

Exprese la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$ en la forma vértice.

Solución:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$$

$$= 2(x^2 - 4x) + 4$$

$$= 2(x^2 - 4x + \ ?\ ) + 4 \ - 2(?)$$

$$= 2\left(x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) + 4 - 2\left(\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)$$

$$= 2(x^2 - 4x + 4) + 4 - 2(4)$$

$$= 2(x-2)^2 - 4$$

El vértice es:

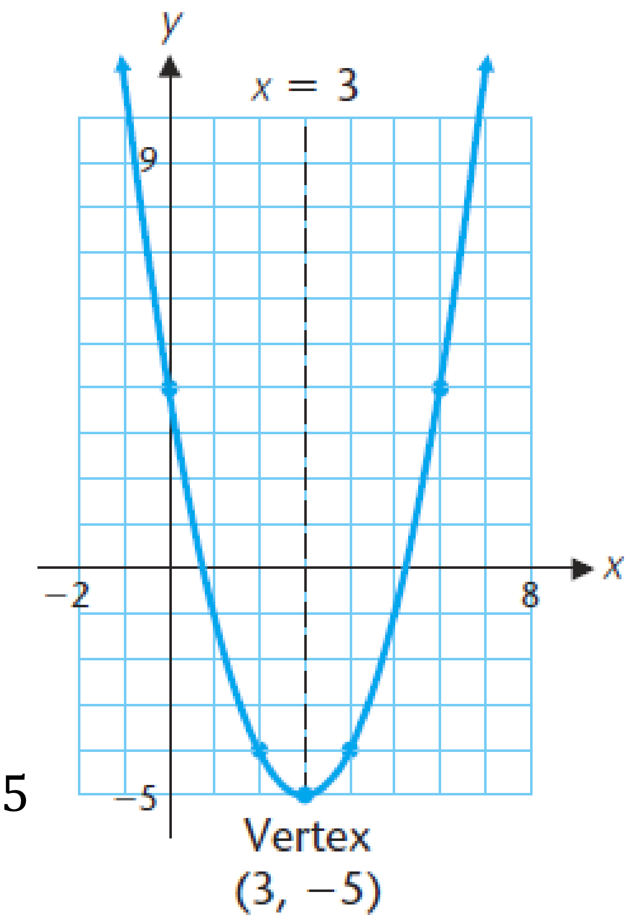
$$\boldsymbol{(h, k) = (2, -4)}$$

El eje de simetría es:

$$\mathbf{x = 2}$$

Ejemplo 4

Determine la función cuadrática dado su gráfica. Expréselo en la forma estándar.



De la gráfica se observa que el vértice es (3, -5)

$$h = 3 \qquad k = -5$$

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$= a(x-(3))^2 + (-5)$$

$$= a(x-3)^2 - 5$$

Además, de la gráfica se observa que el intercepto en y es aproximadamente $(0,4)$

$$f(0) = 4$$

$$a((0)-3)^2 - 5 = 4$$

$$9a - 5 = 4$$

$$9a = 4 + 5$$

$$a = 1$$

$$f(x) = (1)(x-3)^2 - 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

Ejemplo 5

Determine los interceptos de la función $f(x) = 2x^2 + 12x + 5$

Intercepto en y ocurre cuando: $f(0) = 5$.

Por consiguiente, el intercepto en y es (0,5)

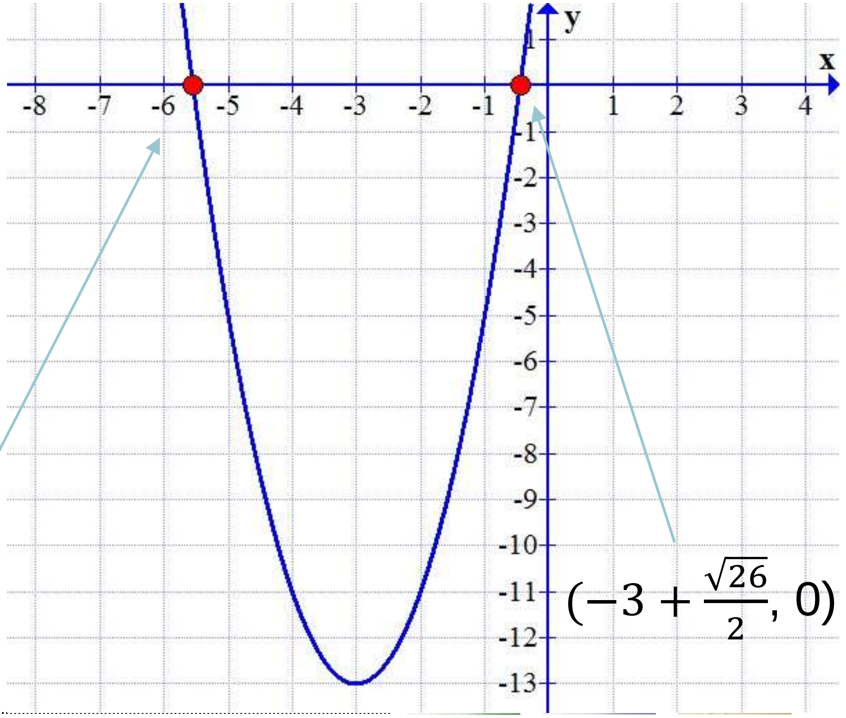
Para hallar el intercepto en x, resuelva la ecuación:

$$0 = 2x^2 + 12x + 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{104}}{2(2)} = \frac{-12}{4} \pm \frac{2\sqrt{26}}{4}$$

$$= -3 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$$

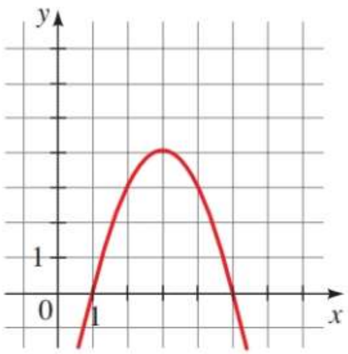


Los interceptos en x son: $\left(-3 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 0\right)$ $\left(-3 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 0\right)$

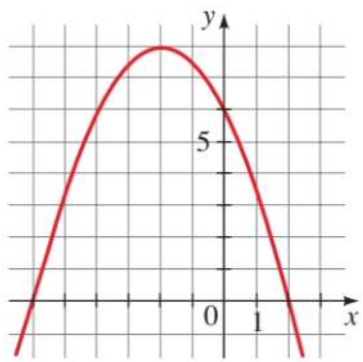
Ejercicios del Texto 3.1

Problemas 5-8: Gráfica de Funciones Cuadráticas: a) Identifique las coordenadas del vértice y los interceptos en x, y (b) Encuentre el valor máximo o mínimo de f c) Encuentre el dominio y rango de f.

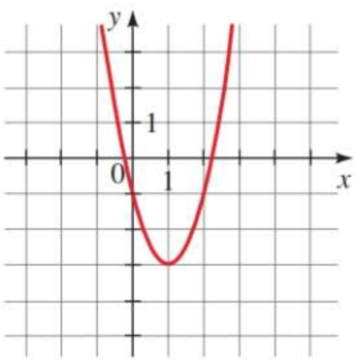
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



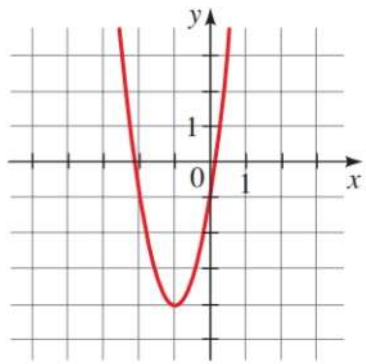
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



Problemas 9-24: Gráfica de Funciones Cuadráticas: a) Exprese f en forma estándar (b) Encuentre elvértice y los interceptos en x, y c) Bosqueje la gráfica d) Encuentre el dominio y rango de f.

9. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

10. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

11. $f(x) = x^2 - 6x$

12. $f(x) = x^2 + 8x$

13. $f(x) = 3x^2 + 6x$

14. $f(x) = -x^2 + 10x$

15. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

16. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

17. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

18. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

19. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

20. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

21. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

22. $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

23. $f(x) = -4x^2 - 12x + 1$

24. $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$

Problemas 25-34: Gráfica de Funciones Cuadráticas: a) Exprese f en forma estándar (b) Bosqueje la gráfica d) Encuentre el valor máximo o míinimo de f.

25. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

26. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

27. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

28. $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

29. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

30. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

31. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

32. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

33. $h(x) = 1 - x - x^2$

34. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

Ejercicios del Texto 3.1

Problemas 35-38: Encuentre el valor máximo o mínimo de f.

35. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

36. $f(x) = 3 - 4x - x^2$

37. $f(t) = -3 + 80t - 20t^2$

38. $f(x) = 6x^2 - 24x - 100$

APPLICATIONS

51. Height of a Ball If a ball is thrown directly upward with a velocity of 40 ft/s, its height (in feet) after t seconds is given by $y = 40t - 16t^2$. What is the maximum height attained by the ball?

53. Revenue A manufacturer finds that the revenue generated by selling x units of a certain commodity is given by the function $R(x) = 80x - 0.4x^2$, where the revenue $R(x)$ is measured in dollars. What is the maximum revenue, and how many units should be manufactured to obtain this maximum?

54. Sales A soft-drink vendor at a popular beach analyzes his sales records and finds that if he sells x cans of soda pop in one day, his profit (in dollars) is given by

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

What is his maximum profit per day, and how many cans must he sell for maximum profit?