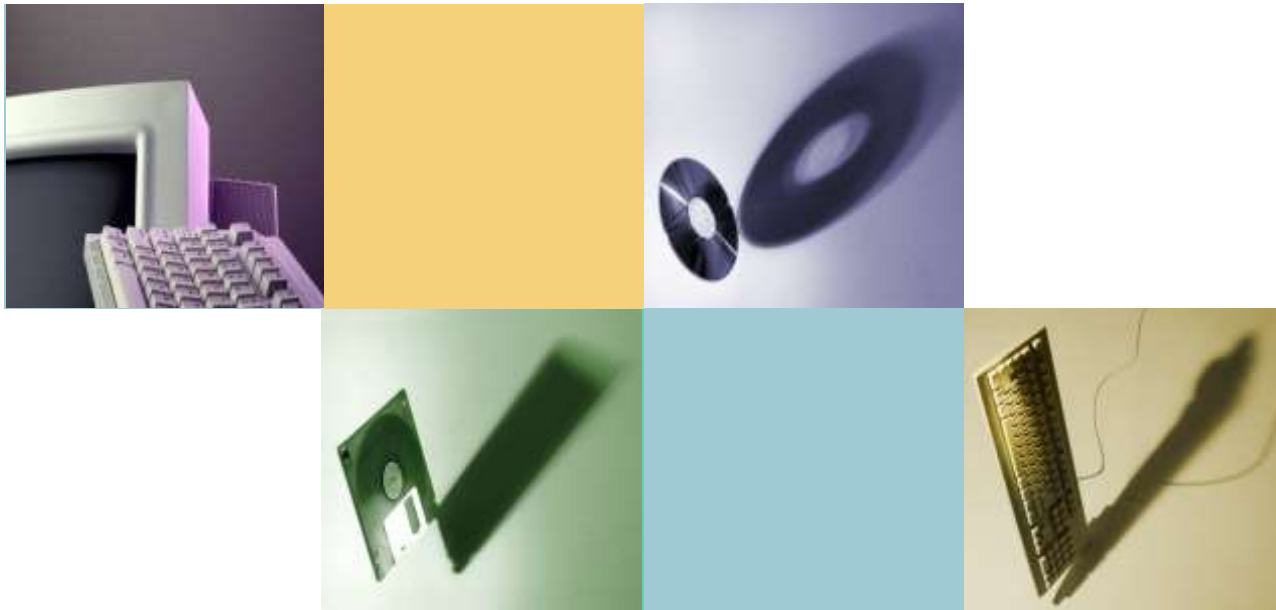


Lección 3.4



Álgebra de funciones y Funciones inversas

Actividades 3.4

- **Referencias:**
- **Sección 2.7** –: Combinando Funciones: Ejercicios: 1, 2, 7-12, 17, 18, 20; impares 27-37, impares 39-45, 47-49, 55, 63-67.
- **Sección 2.8** – Funciones Uno a Uno y Funciones Inversas: Ejercicios: 7-20, 25-27, 29, 37-40; impares 49 – 61, 67, 70.
- **Referencias del Web:**
 - Julio Profe: [Halla la función inversa de una función](#)
 - Math2Me: [Hallar la función inversa de manera algebraica](#)
 - Matematicatuya - [Gráfica de la Función Inversa](#)



Operaciones de funciones

- Si $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -6$

$$- (f + g)(x) = (3x - 1) + (-6) = 3x - 7$$

$$- (f - g)(x) = (3x - 1) - (-6) = 3x + 5$$

$$- (f \times g)(x) = (3x - 1) \times (-6) = -18x + 6$$

$$- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x - 1}{-6} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$$

- El dominio es la intersección de los dominios de f y g

Dominio es todos los Reales: $(-\infty, \infty)$



Ejemplo 1

- Sea $f(x) = \sqrt{x-3}$ $g(x) = x^2 - 16$
Determine la función que resulta y su dominio.
- $3g(x) = 3(x^2 - 16) = 3x^2 - 48$ *Dominio* = $(-\infty, \infty)$
- $f(7) - g(-3) = \sqrt{(7) - 3} - ((-3)^2 - 16)$
 $= 2 - 9 + 16 = 9$
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $= \sqrt{x-3} + x^2 - 16$

Dominio: $[3, \infty)$


$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Ejemplo 2

Determine el cociente de f y g . Además, identifique su dominio.

$$f(x) = \sqrt{x-3} \quad g(x) = x^2 - 16$$

$$\begin{aligned} (f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\sqrt{x-3}}{x^2 - 16} \end{aligned}$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$x \neq \pm 4$$

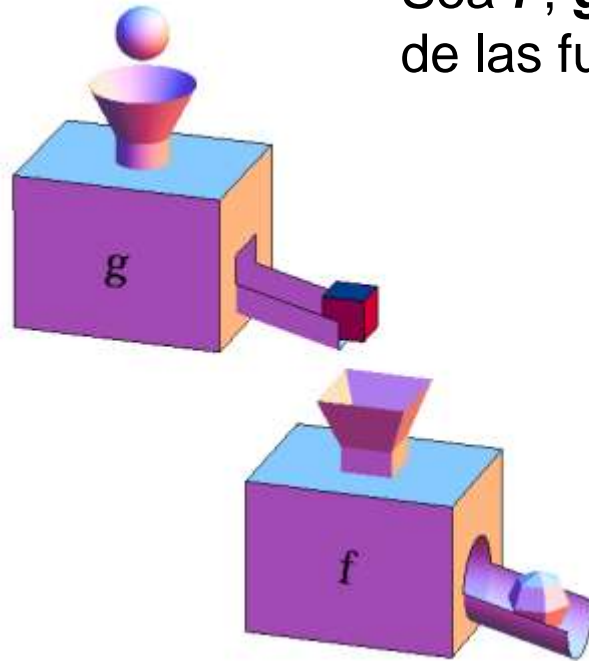
Dominio son los reales mayores o igual que 3 pero tiene que **excluir** $x = 4$ porque $g(x) = 0$ cuando $x = 4$ ó $x = -4$.

Dominio: $[3,4) \cup (4, \infty)$



Sea f , g dos funciones entonces la composición de las funciones f y g está definida como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



COMPOSICIÓN DE FUNCIONES



Ejemplo 2

- Sea la $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2 - 1$, entonces:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= f(g(2)) \\ &= f(2^2 - 1) \\ &= f(3) \\ &= 3(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g(3(2)) \\ &= g(6) \\ &= 6^2 - 1 \\ &= 35\end{aligned}$$



Ejemplo 3

- Encuentre $f \circ g$ si: $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \frac{1}{x+2}$
Además, determine su dominio.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x+2}\right) \\ & &= \sqrt{\frac{1}{x+2}} \\ & &= \frac{1}{\sqrt{x+2}}\end{aligned}$$

Por tanto, $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

El dominio de $f \circ g$ is $\{x \mid x > -2\}$.



Ejemplo 4

- a) Encuentre $(g + f)(5)$ si $f(x) = -3x + 5$, $g(x) = 2x^2 + 2$.
- b) Si $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ encuentre $f+g$ y f/g y el dominio de cada nueva función.
- c) Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ encuentre $(f \circ g)(x)$ y el dominio de la nueva función.

Solución:

$$\begin{aligned}(g + f)(5) &= g(5) + f(5) = 2(5)^2 + 2 + -3(5) + 5 \\ &= 52 - 10 = 42\end{aligned}$$



Ejemplo 4 ...

b) Si $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ encuentre $f + g$, fg , f/g y su dominio

$$(f + g)(x) = (x^2 + 1) + \sqrt{x} \quad \text{Dominio: } [0, \infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} \quad \text{Dominio: } [0, \infty)$$

$$(f \div g)(x) = \frac{(x^2 + 1)}{\sqrt{x}} \quad \text{Dominio: } (0, \infty)$$

c) Si $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$ y su dominio

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1) + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Dominio: $[0, \infty)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + 1 \quad \text{Dominio: } (-1, \infty)$$

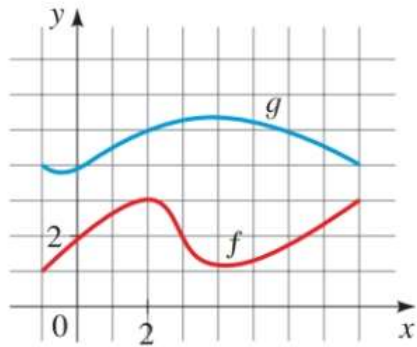


Ejercicios de Texto 2.7

1. From the graphs of f and g in the figure, we find

$$(f + g)(2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (f - g)(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(fg)(2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$



17–20 ■ **Domain** Find the domain of the function.

17. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$

18. $f(x) = \sqrt{x + 4} - \frac{\sqrt{1 - x}}{x}$

19. $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$

20. $k(x) = \frac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

7–16 ■ **Combining Functions** Find $f + g$, $f - g$, fg , and f/g and their domains.

7. $f(x) = x$, $g(x) = 2x$

8. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$

9. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$

10. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 - 4$

11. $f(x) = 5 - x$, $g(x) = x^2 - 3x$

12. $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$

27–32 ■ **Evaluating Composition of Functions** Use $f(x) = 2x - 3$ and $g(x) = 4 - x^2$ to evaluate the expression.

27. (a) $f(g(0))$

(b) $g(f(0))$

28. (a) $f(f(2))$

(b) $g(g(3))$

29. (a) $(f \circ g)(-2)$

(b) $(g \circ f)(-2)$

30. (a) $(f \circ f)(-1)$

(b) $(g \circ g)(-1)$

31. (a) $(f \circ g)(x)$

(b) $(g \circ f)(x)$

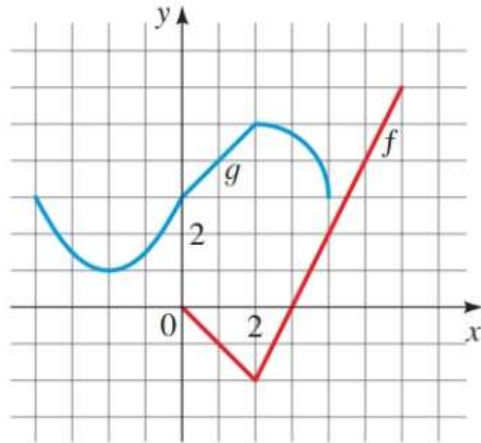
32. (a) $(f \circ f)(x)$

(b) $(g \circ g)(x)$



Ejercicios de Texto 2.7 ...

33–38 ■ Composition Using a Graph Use the given graphs of f and g to evaluate the expression.



33. $f(g(2))$

34. $g(f(0))$

35. $(g \circ f)(4)$

36. $(f \circ g)(0)$

37. $(g \circ g)(-2)$

38. $(f \circ f)(4)$

63–68 ■ Expressing a Function as a Composition Express the function in the form $f \circ g$.

63. $F(x) = (x - 9)^5$

64. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

65. $G(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

66. $G(x) = \frac{1}{x + 3}$

67. $H(x) = |1 - x^3|$

68. $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

39–46 ■ Composition Using a Table Use the table to evaluate the expression.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	1	6	3
$g(x)$	3	5	6	2	1	4

39. $f(g(2))$

40. $g(f(2))$

41. $f(f(1))$

42. $g(g(2))$

43. $(f \circ g)(6)$

44. $(g \circ f)(2)$

45. $(f \circ f)(5)$

46. $(g \circ g)(2)$

47–58 ■ Composition of Functions Find the functions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, and $g \circ g$ and their domains.

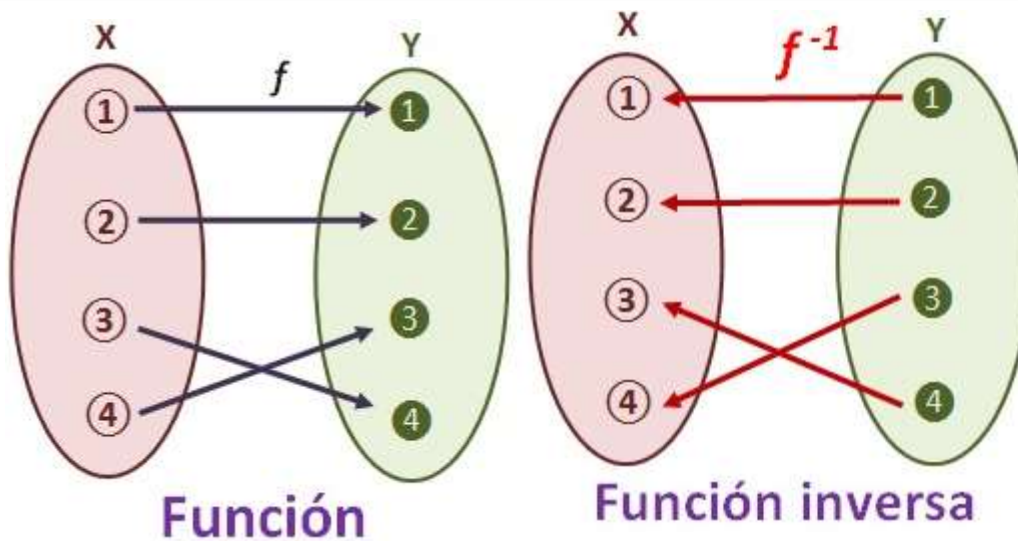
47. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 1$

48. $f(x) = 6x - 5$, $g(x) = \frac{x}{2}$

49. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$

55. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $g(x) = 2x - 1$





Se dice que f^{-1} es la **función inversa** de una función f si para todo valor del dominio x se cumple:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

FUNCIONES INVERSAS

Además, se dice que f es una **función 1-1**



Funciones 1-1

- Una función es 1-1 si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$
- Ejemplo 1: Determine si las siguientes funciones son 1-1
 - a) $\{(5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 4), (1, 0)\}$
 - b) $\{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
- Solución:
 - a) $\{(5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 4), (1, 0)\}$ NO. El 4 está asociado a 5 y a 2.
 - b) $\{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$ Es 1-1.
- Ejemplo 2: Determine la función inversa de $\{(-3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
- Solución:
- $\{(0, -3), (1, -2), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$



Ejemplo 5

- Determine si $f(x) = \frac{3}{x+4}$ es una función 1-1
- Solución:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{3}{x_1 + 4} = \frac{3}{x_2 + 4}$$

$$3(x_2 + 4) = 3(x_1 + 4)$$

$$3x_2 + 12 = 3x_1 + 12$$

$$3x_2 + 12 - 12 = 3x_1$$

$$3x_2 = 3x_1$$

$$x_2 = x_1$$

¡Es una función 1-1



Ejemplo 6

- Determine la función inversa f^{-1} si $f(x) = \frac{3}{x+4}$ es una función 1-1
- Solución:

Paso 1 – Exprese la función como una ecuación

$$y = \frac{3}{x+4}$$

Paso 2 – Intercambiar las variables

$$x = \frac{3}{y+4}$$

Paso 3 – Despejar y de la ecuación

$$x(y+4) = 3$$

$$(y+4) = \frac{3}{x}$$

$$y = \frac{3}{x} - 4$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{x} - 4$$

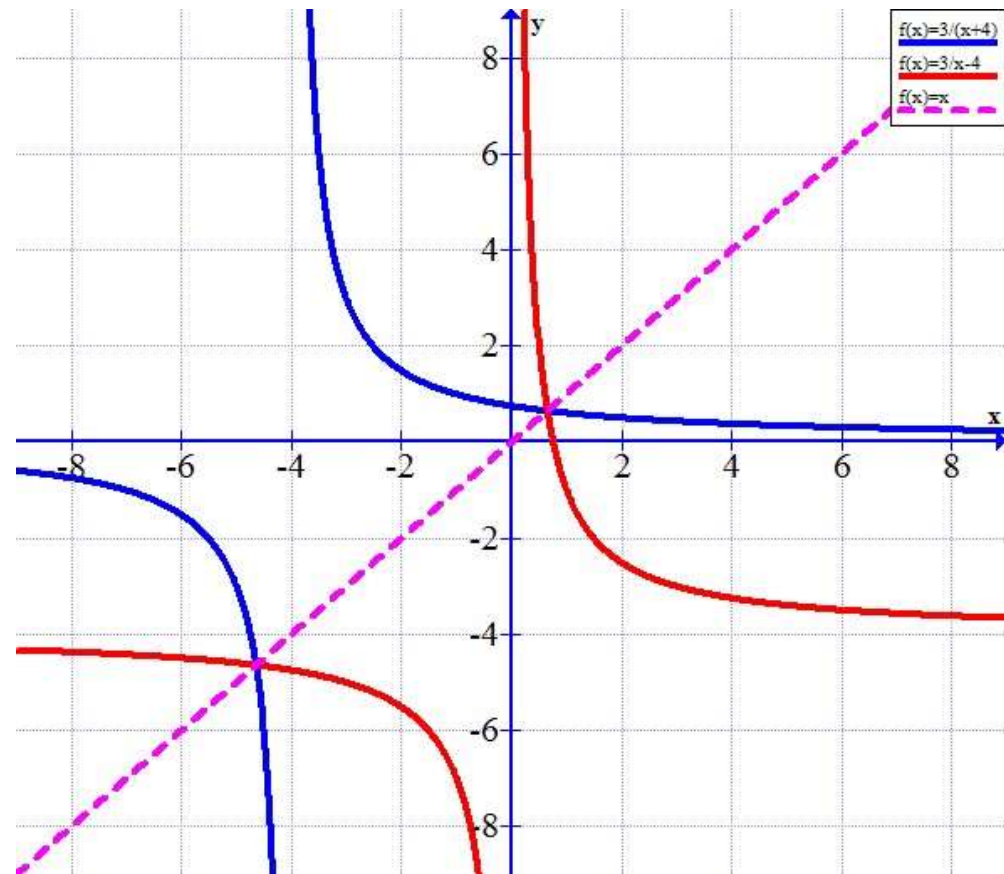


La gráfica de una función 1-1

- Una función es 1-1 si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Esto implica que cualquier recta horizontal pasará por un solo punto.

La gráfica de su función inversa será una simétrica con respecto a la gráfica de de la ecuación $y = x$.



Composición de una función y su inversa

- Si f^{-1} la función inversa de f entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Determine si $f(x) = 2x - 4$ es la función inversa de $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - 4$$

$$= x + 4 - 4$$

$$= x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(2x - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(2x - 4) + 2$$

$$= x - 2 + 2$$

$$= x$$

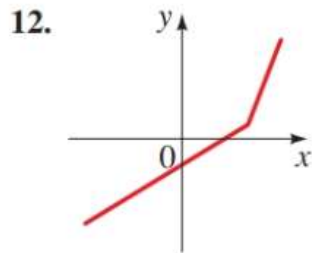
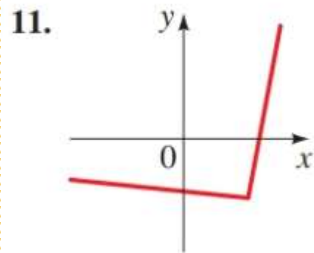
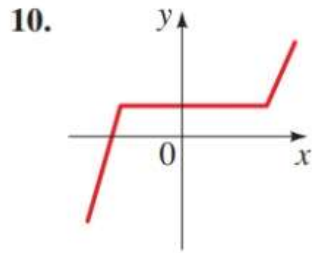
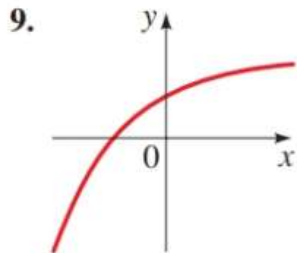
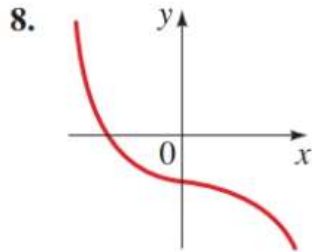
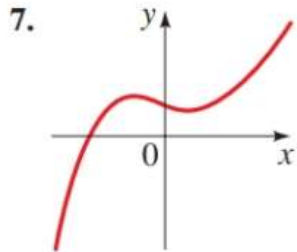
Si $f(x) = 2x - 4$ es la función inversa de $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$



Ejercicios de Texto 2.8

7–12 ■ **One-to-One Function?** A graph of a function f is given.

Determine whether f is one-to-one.



13–24 ■ **One-to-One Function?** Determine whether the function is one-to-one.

13. $f(x) = -2x + 4$

14. $f(x) = 3x - 2$

15. $g(x) = \sqrt{x}$

16. $g(x) = |x|$

17. $h(x) = x^2 - 2x$

18. $h(x) = x^3 + 8$

19. $f(x) = x^4 + 5$

20. $f(x) = x^4 + 5, 0 \leq x \leq 2$

25–28 ■ **Finding Values of an Inverse Function** Assume that f is a one-to-one function.

25. (a) If $f(2) = 7$, find $f^{-1}(7)$.

(b) If $f^{-1}(3) = -1$, find $f(-1)$.

26. (a) If $f(5) = 18$, find $f^{-1}(18)$.

(b) If $f^{-1}(4) = 2$, find $f(2)$.

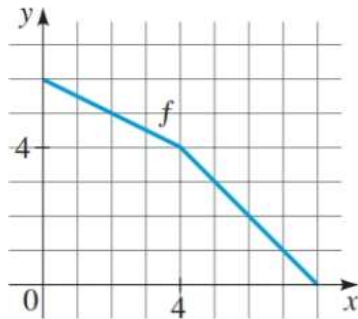
27. If $f(x) = 5 - 2x$, find $f^{-1}(3)$.



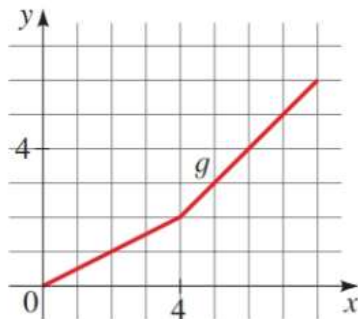
Ejercicios de Texto 2.8 ...

29–30 ■ Finding Values of an Inverse from a Graph A graph of a function is given. Use the graph to find the indicated values.

29. (a) $f^{-1}(2)$ (b) $f^{-1}(5)$ (c) $f^{-1}(6)$



30. (a) $g^{-1}(2)$ (b) $g^{-1}(5)$ (c) $g^{-1}(6)$



67. $f(x) = \sqrt{5 + 8x}$ 68. $f(x) = 2 + \sqrt{3 + x}$

69. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$

70. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

37–48 ■ Inverse Function Property Use the Inverse Function Property to show that f and g are inverses of each other.

37. $f(x) = x - 6$; $g(x) = x + 6$

38. $f(x) = 3x$; $g(x) = \frac{x}{3}$

39. $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = \frac{x - 4}{3}$

40. $f(x) = 2 - 5x$; $g(x) = \frac{2 - x}{5}$

49–70 ■ Finding Inverse Functions Find the inverse function of f .

49. $f(x) = 3x + 5$

50. $f(x) = 7 - 5x$

51. $f(x) = 5 - 4x^3$

52. $f(x) = 3x^3 + 8$

53. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

54. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

55. $f(x) = \frac{x}{x + 4}$

56. $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

57. $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 7}$

58. $f(x) = \frac{4x - 2}{3x + 1}$

59. $f(x) = \frac{2x + 3}{1 - 5x}$

60. $f(x) = \frac{3 - 4x}{8x - 1}$

61. $f(x) = 4 - x^2$, $x \geq 0$

62. $f(x) = x^2 + x$, $x \geq -\frac{1}{2}$