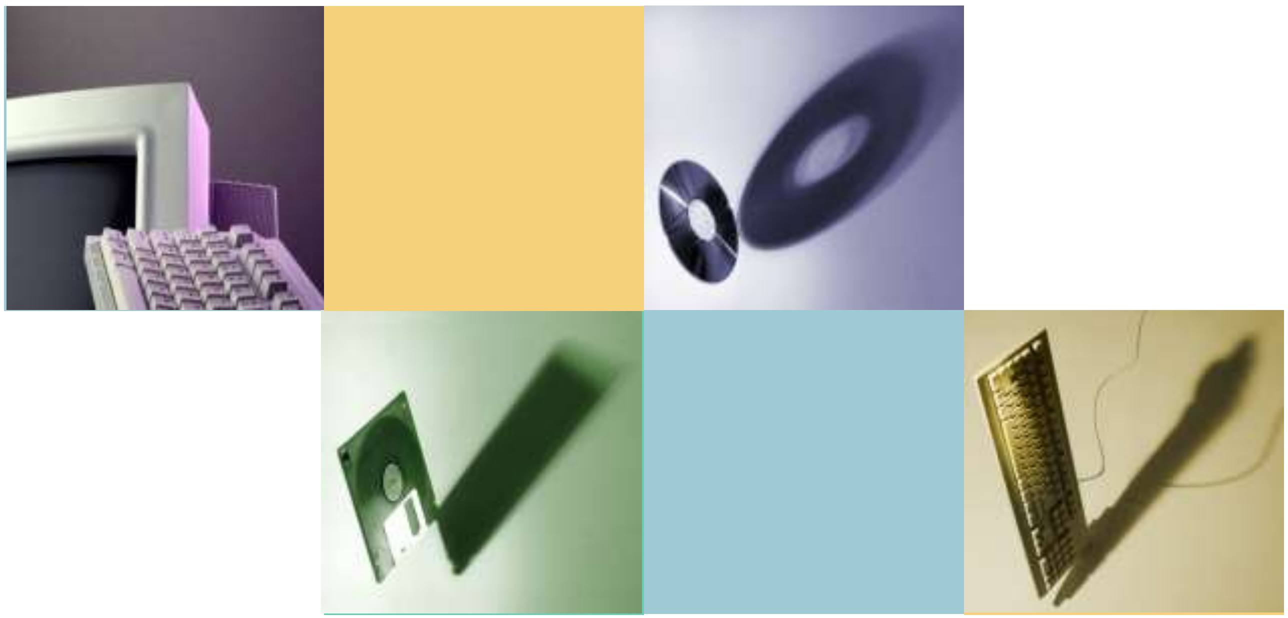
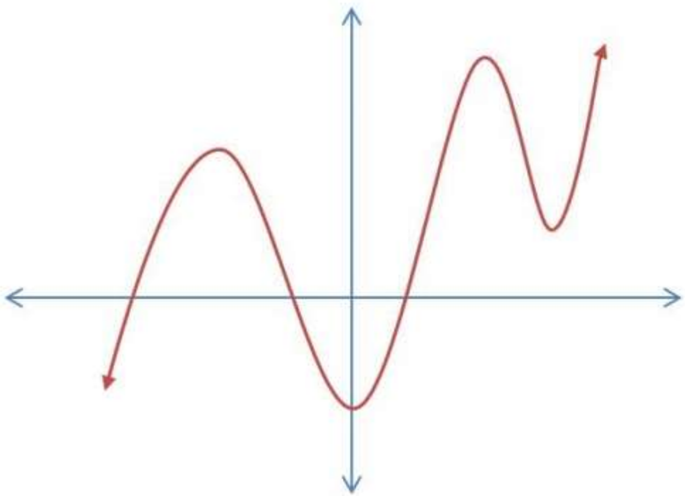
Unidad 4 – Lección 4.1

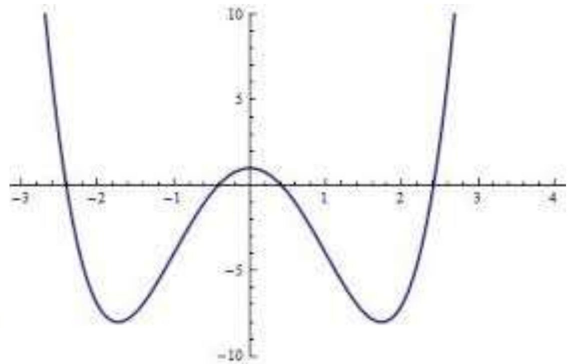


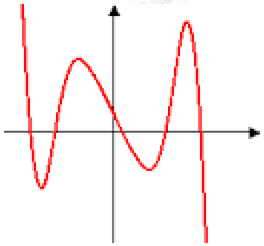
Gráficas de las Funciones Polinómicas

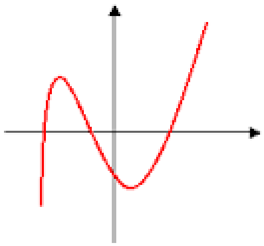
Actividades 4.1

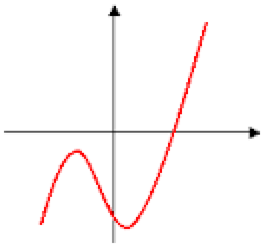
- **Referencias:**
  - Sección 3.2 – Funciones Polinómicas y sus Gráficas. Ejercicios de Práctica: 9-18; 20, 28, 31, 32, 35, 36
  - Secciones 3.3 – División de Polinomios: 3-13, 15-20, 25-32
- **Referencias del Web:**
  - Math2me – Funciones Polinomiales; División Sintética o Ruffini











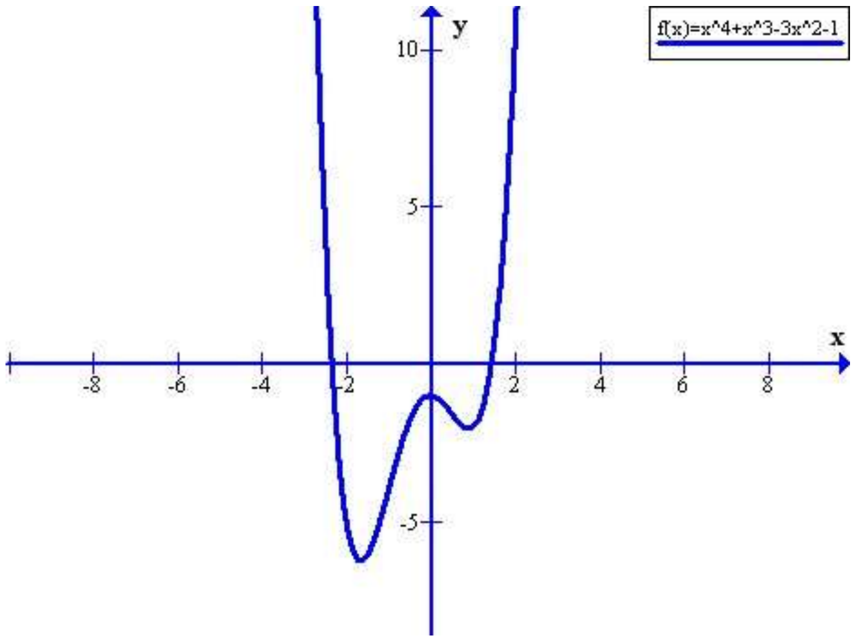
*Una **función polinómica o polynomial** es una función de la forma:*

FUNCIONES POLINÓMICAS

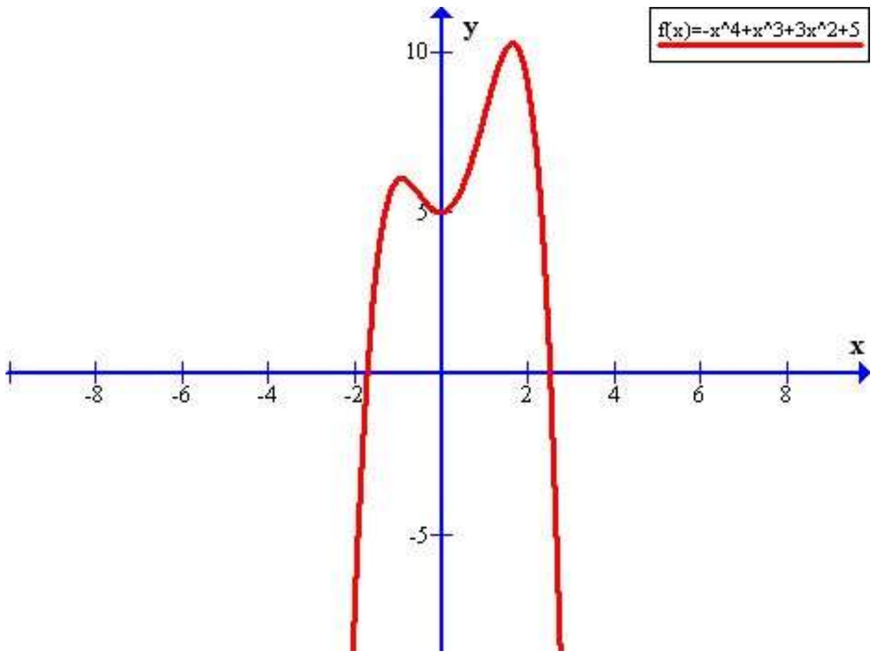
$$f(x) = polinomio$$

Comportamiento extremo de los polinomios con grado par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$



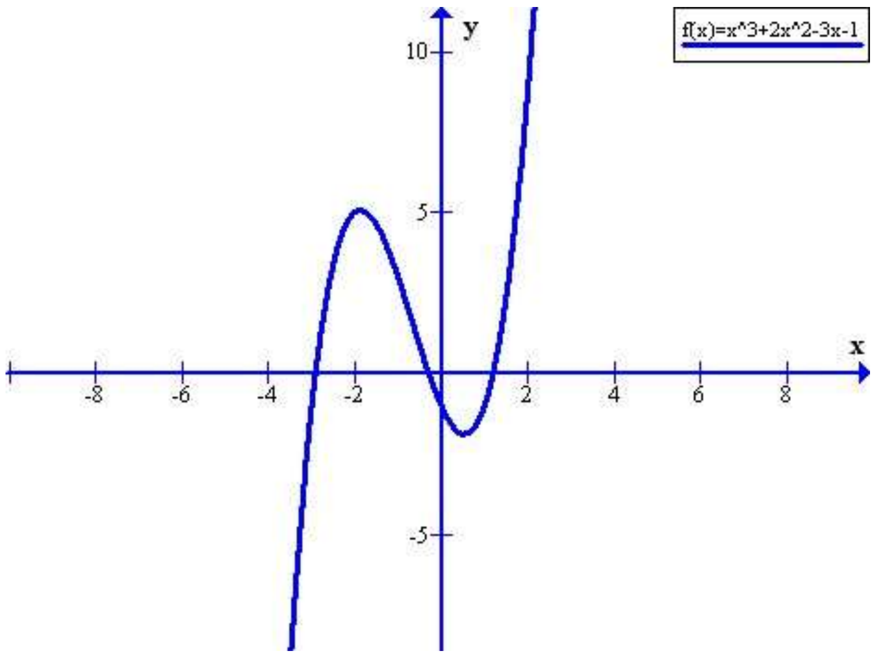
$a_n > 0$

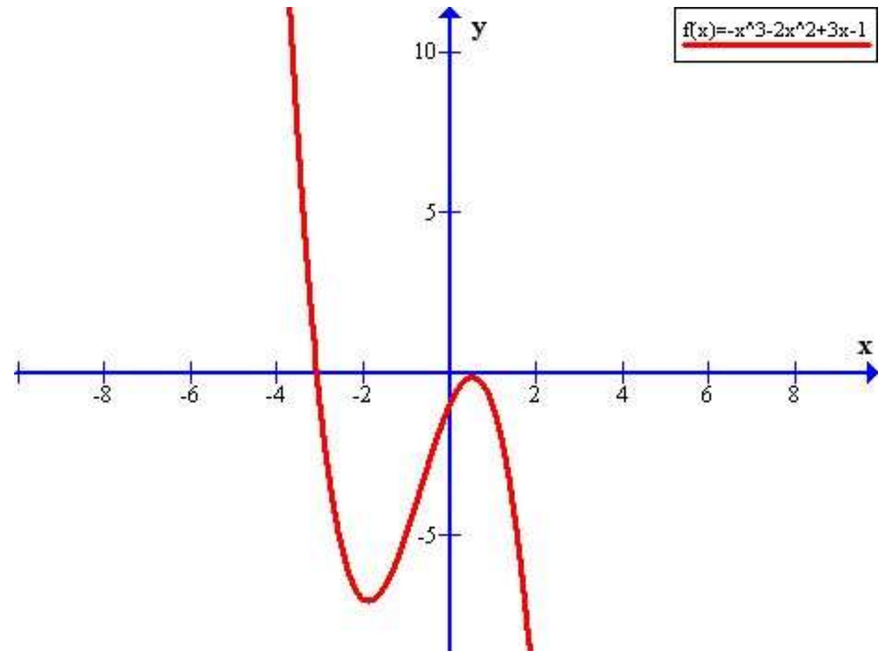


$a_n < 0$

Comportamiento extremo de los polinomios con grado impar

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$



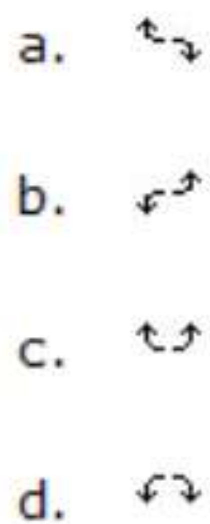


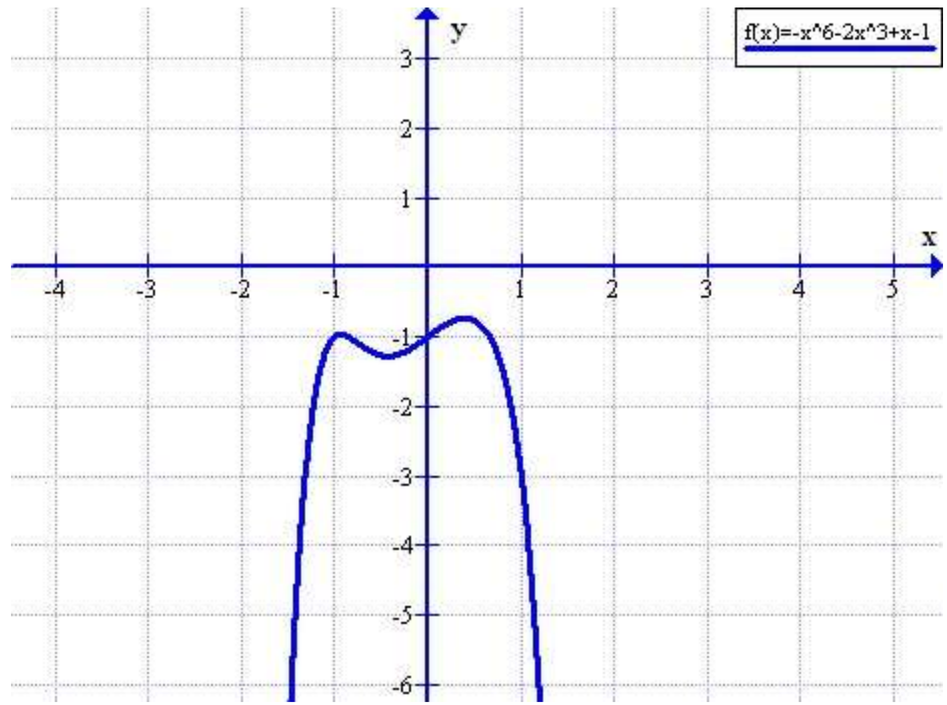
$a_n > 0$ **$a_n < 0$**

Ejemplo 1

- ¿Cuál de los siguientes describe el comportamiento de los extremos de la función?

$$f(x) = -x^6 - 2x^3 + x - 1$$

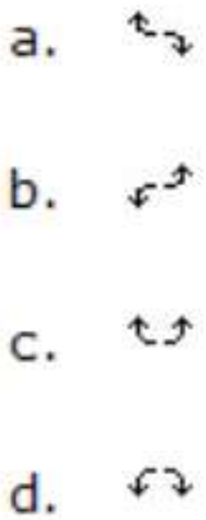


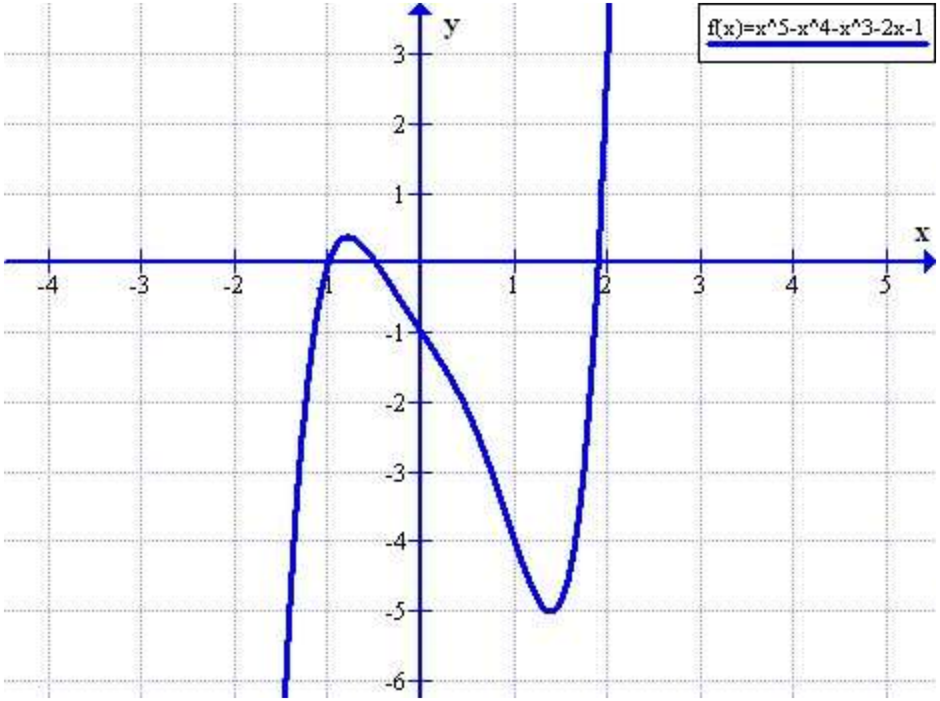


Alternativa correcta es d.

Ejemplo 2

- ¿Cuál de los siguientes describe el comportamiento de los extremos de la función $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x - 1$?





Alternativa correcta es b.

El cero (raíz) de una función polinómica es un valor r tal que

$$f(r) = 0$$

CEROS DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

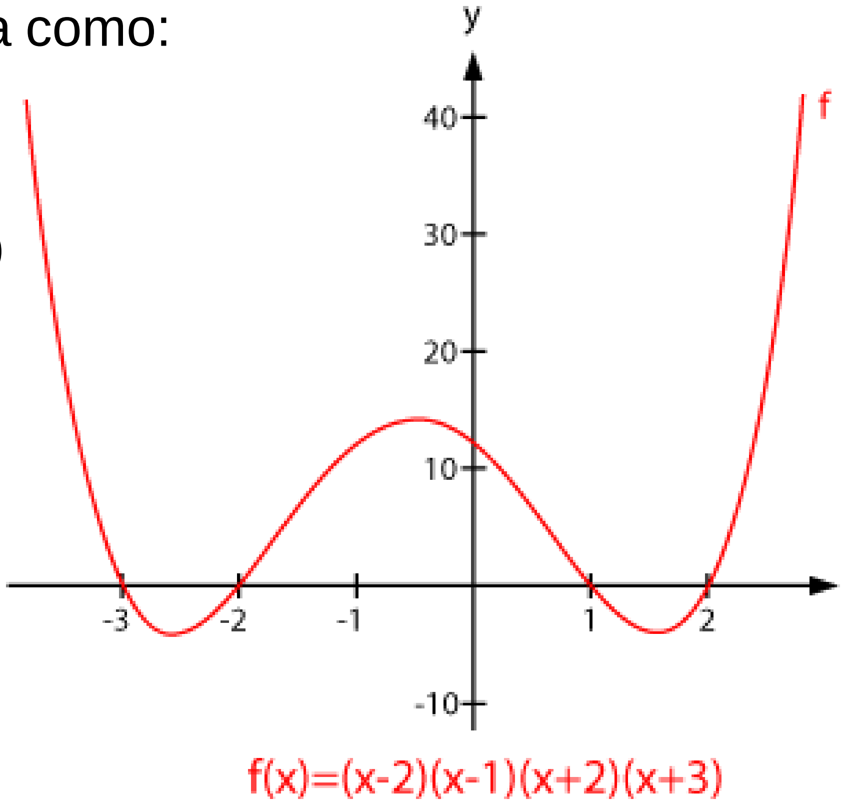
Ejemplo 3

Las raices de $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ son: -3, -2, 1 y 2

por que … $f(\mathbf{-3}) = 0$ $f(\mathbf{-2}) = 0$ $f(\mathbf{1}) = 0$ $f(\mathbf{2}) = 0$

Además, el polinomio se factoriza como:

$$f(x) = (x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$$



Teorema del Factor:
Si r es un número real y cero de la función f, entonces $(x-r)$es un factor de f y $(r, 0)$ es un intercepto de x.

Ejemplo 4

- Determina si -1 es un cero de la función polinómica

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 6x + 3$$

Solución:

$$f(-1) = -(-1)^4 + 4(-1)^2 + 6(-1) + 3$$

$$= -1 + 4 - 6 + 3$$

$$= 0$$

-1 es un cero de f

Además, $(x + 1)$ *es un factor de* f

Ejemplo 5

- Encuentre los ceros e interceptos de la función:

$$f(x) = (x+1)^2(x-5)(x+4)$$

Los ceros son -1, 5 y -4

Los interceptos en x son (-1, 0), (5,0), and (-4,0)

Para el intercepto en y, se evalua *f*(0)

$$f(0) = (0+1)(0-5)(0+4) = -20$$

El intercepto en y es (0,-20)

Ejemplo 6

- Determine si $x + 5$ es un factor de $4x^3 + 18x^2 - 11x - 5$.
- Solución:
- Por el teorema del factor si $x + 5$ es un factor, -5 debe ser un cero de la función $f(x) = 4x^3 + 18x^2 - 11x - 5$.
- Evaluamos $f(-5)$ para determinar si es igual a 0.

$$
\begin{aligned}
f(-5) &= 4(-5)^3 + 18(-5)^2 - 11(-5) - 5 \\
&= 4(-125) + 18(25) - 11(-5) - 5 \\
&= -500 + 450 + 55 - 5 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $x + 5$ es un factor.

Ejemplo 7…

- Si 4 es un cero de la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$ determine todos los ceros de esta función y exprésela en forma factorizada.
- Solución:
- Si 4 es un cero, $(x - 4)$ es un factor de la función. Por tanto, existe un polinomio $g(x)$ tal que:

$$f(x) = (x-4)g(x)$$

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x-4)g(x)$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 8x + 16}{(x-4)} = g(x)$$

Ejemplo 5 …

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x \; - 4 \\
\hline
x - 4 & x^3 - 7x^2 + 8x + 16 \\
(-) & x^3 \oplus 4x^2 \\
\hline
 & -3x^2 + 8x \\
 & \oplus \; (-) \\
 & -3x^2 + 12x \\
\hline
 & -4x + 16 \\
 & \oplus \; (-) \\
 & -4x + 16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$g(x) = x^2 - 3x - 4$$

Como …

$$f(x) = (x-4)g(x)$$

$$f(x) = (x-4)\left(x^2 - 3x - 4\right)$$

Factorizando el trinomio …

$$f(x) = (x-4)(x-4)\left(x+1\right)$$

$$f(x) = (x-4)^2\left(x+1\right)$$

Los ceros de la función son 4 y -1

División Sintética …

- Es una manera simple de dividir un polinomio entre un binomio de la forma $(x - a)$.
- Ejemplo: Divida $\dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + 1}$

$$x^3 + 0x^2 - 3x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

←**Residuo**:
Observe que es 0.

$$\frac{x^3-3x-2}{x+1} = x^2 - x - 2$$

Ejemplo 8

- Use la división sintética para calcular: $\dfrac{2x^3 - 15x^2 + 21x - 16}{x - 6}$
- Solución:

$$\begin{array}{c|ccccc} 6 & 2 & -15 & + & 21 & -16 \\ \hline & & 12 & & -18 & 18 \\ \hline & 2 & -3 & & 3 & 2 \end{array}$$

←**Nota**: *Observe que el residuo no es 0. Por lo tanto, el divisor NO es un factor del dividendo.*

$$\frac{2x^3 - 15x^2 + 21x - 16}{x - 6} = 2x^2 - 3x + 3 + \frac{2}{x - 6}$$

$$2x^3 - 15x^2 + 21x - 1 = (2x^2 - 3x + 3)(x - 6) + 2$$

Teorema del Residuo

Si $P(x)$ es una función polinómica, el valor $P(r)$ es el residuo de la división de $P(x)$ entre $x - r$

Ejemplo:

En la division $\dfrac{2x^3-15x^2+21x-16}{x-6}$ se observó que el residuo fue 2.

Si evaluamos P(6) observamos:

$$P(6) = 2(6)^3 - 15(6)^2 + 21(6) - 16 \quad = \quad 2$$

Ejemplo 9 …

Determine el residuo al dividir $P(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 10$ entre $x + 2$.

Solución:

Calcule $P(-2)$ $= (-2)^4 + 5(-2)^3 + 2(-2)^2 - 10$

$= 16 - 40 + 8 - 10$

$= -26$

Ejercicios del Texto 3.2

Problemas 9-14: (a) Describe el comportamiento final de cada función polinómica (b) Paree la función con una de las gráficas I-VI

9. $P(x) = x(x^2 - 4)$

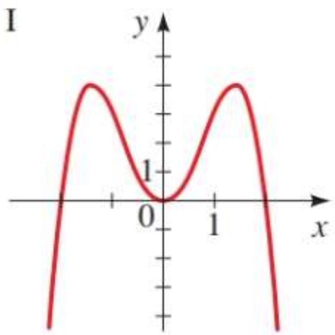
10. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

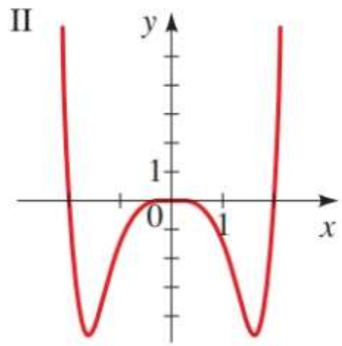
11. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$

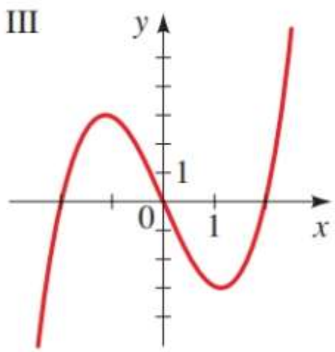
12. $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

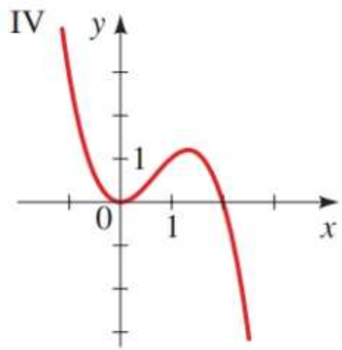
13. $T(x) = x^4 + 2x^3$

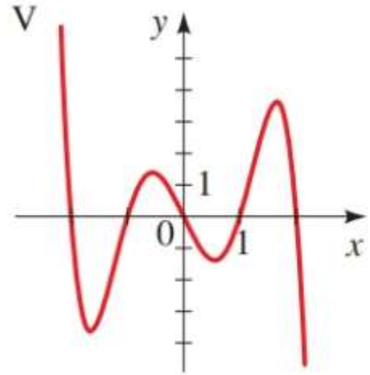
14. $U(x) = -x^3 + 2x^2$

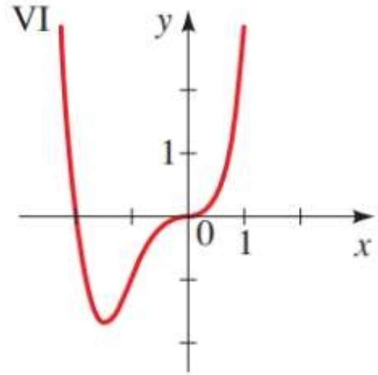












Problemas 15-30: Bosquje la gráfica de la función. Asegúrese de mostrar todos los interceptos y el comportamiento de su gráfica

15. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

16. $P(x) = (2 - x)(x + 5)$

17. $P(x) = -x(x - 3)(x + 2)$

18. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

20. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

28. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

Ejercicios del Texto 3.2 y 3.3

Problemas 31-44: Factorice el polinomio y use su forma factorizada para encontrar todos los ceros.. Bosqueje su gráfica.

31. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$ **32.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

33. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$ **34.** $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

35. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ **36.** $P(x) = x^5 - 9x^3$

3–8 ■ Division of Polynomials Two polynomials P and D are given. Use either synthetic or long division to divide $P(x)$ by $D(x)$, and express the quotient $P(x)/D(x)$ in the form

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

3. $P(x) = 2x^2 - 5x - 7, \quad D(x) = x - 2$

4. $P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1, \quad D(x) = x + 4$

5. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad D(x) = 2x - 1$

6. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$

7. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2, \quad D(x) = x^2 + 4$

8. $P(x) = 2x^5 + x^3 - 2x^2 + 3x - 5, \quad D(x) = x^2 - 3x + 1$

9–14 ■ Division of Polynomials Two polynomials P and D are given. Use either synthetic or long division to divide $P(x)$ by $D(x)$, and express P in the form

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

9. $P(x) = -x^3 - 2x + 6, \quad D(x) = x + 1$

10. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 10x, \quad D(x) = x - 3$

11. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x, \quad D(x) = 2x - 3$

12. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9, \quad D(x) = 2x + 1$

13. $P(x) = 8x^4 + 4x^3 + 6x^2, \quad D(x) = 2x^2 + 1$

Problemas 15-24: Encuentre el cociente y el residuo usando división larga

15. $\dfrac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$ **16.** $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x + 3}$

17. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$ **18.** $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$

19. $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x + 3}$ **20.** $\dfrac{x^4 - 3x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 1}$

Ejercicios del Texto 3.2 y 3.3

Problemas 25-32: Encuentre el cociente y residuo usando división sintética

25. $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x - 3}$

26. $\dfrac{-x^2 + x - 4}{x + 1}$

27. $\dfrac{3x^2 + x}{x + 1}$

28. $\dfrac{4x^2 - 3}{x - 2}$

29. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

30. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$

31. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$

32. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$