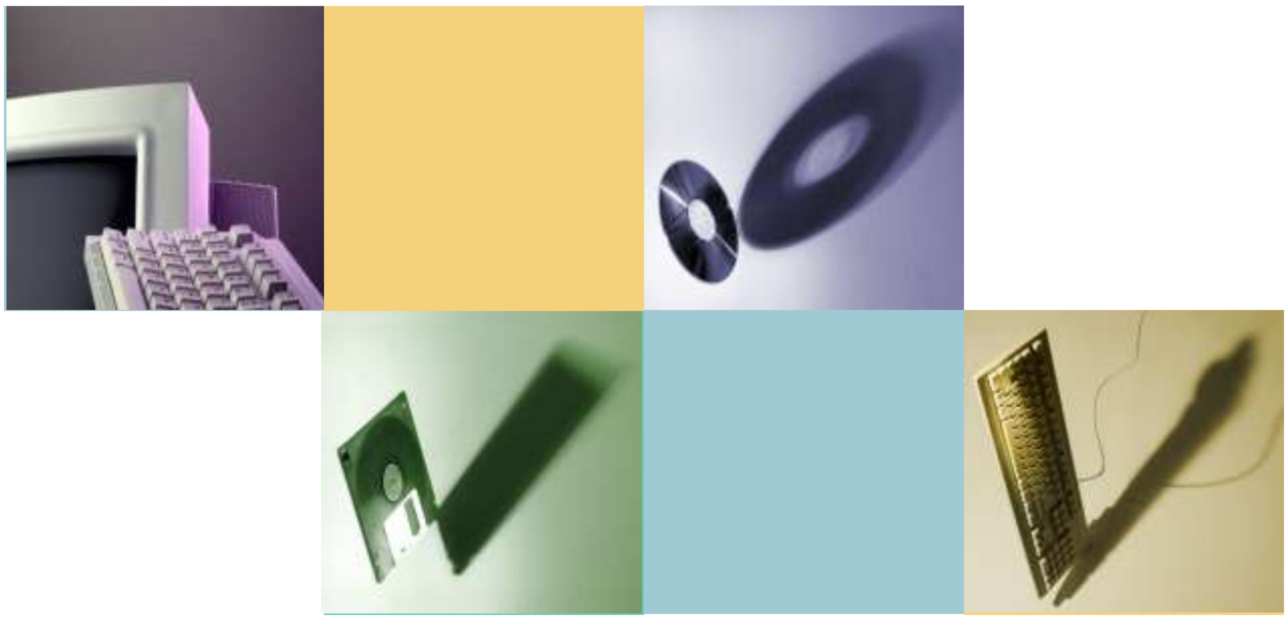
Unidad 4 – Lección 4.2



Ceros Complejos y Funciones Racionales

Actividades 4.2

- **Referencias:**
  - Sección 3.4 – Ceros Reales 5-10, 15-19, 29, 31, 32, 34, 35,39, 46-49, 57-58 (solo parte a)
  - Sección 3.5 – Ceros Complejos; 7-11, 19-29, 33, 34, 37, 47-52
  - Sección 3.6 - Funciones Racionales; 13-15, 21-23, 27-30, 31-41 (impares), 43, 49, 51, 55, 63, 65
- Referencias del Web:
  - Math2me: Hallar los ceros de un polinomio; Asíntota de una Función Racional; Asíntotas Verticales y Horizontales de una función.
  - Factorización de Polinomios en Complejos
  - Zona Virtual – Funciones Racionales
  - Purple Math - Graphing Rational Functions

Multiplicidad del cero de un polinomio

- Si $(x-r)^m$ es un factor de un polinomio totalmente factorizado, entonces *r* se llama un **cero con multiplicidad *m*.**

- Si $f(x)=(x-3)^2(x+7)\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$

$x = 3$ es un cero con multiplicidad de 2.

$x = -7$ es un cero con multiplicidad de 1

$x = 1/2$ es un cero con multiplicidad de 5.

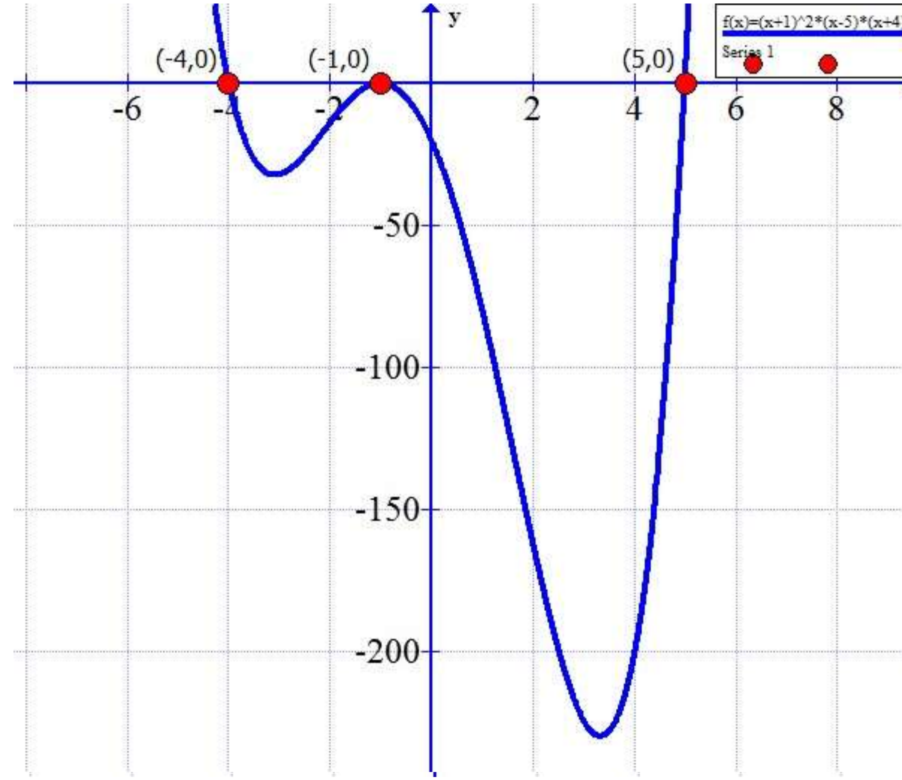
Propiedad de la multiplicidad

Si r es un cero con **multiplicidad par** el signo de $f(x)$ **no cambia** de un lado al otro de r. Por tanto, la gráfica **toca** el eje de x en r.

Si r es un cero con **multiplicidad impar** el signo de $f(x)$ **cambia** de un lado al otro de r. Por tanto, la gráfica **cruza** el eje de x en r.

Ejemplo 1

- Para la función $f(x) = (x+1)^2(x-5)(x+4)$, use la multiplicidad de los ceros y el grado para bosquejar su gráfica:



$x = -4$ es un cero de multiplicidad 1. Cruza el eje de x en (-4,0).

$x = -1$ es un cero de multiplicidad 2. Toca el eje de x en (-1,0).

$x = 5$ es un cero de multiplicidad 1. Cruza el eje de x en (5,0).

Observe que la función es de grado 4, por tanto par.

Teorema de la Factorización:

Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos se puede factorizar como el producto de n factores lineales. Entonces,

1. Si tiene n raices $r_{1,} r_2, \ldots, r_n$ que pueden ser números reales o complejos que se repiten o no.
2. La función se puede escribir como:

$$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene un cero complejo

Ejemplo 2

- Determine los ceros de la función $f(x) = 3x^3 + 12x$ y exprése la función de forma factorizada como un producto de factores lineales con coeficientes reales o complejos.
- Solución:
- Factorizando $f(x) = 3x(x^2 + 4)$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

- Los ceros de la función son: $0, 2i, -2i$
- Su forma factorizada como un producto de factores lineales con coeficientes reales o complejos es:

$$f(x) = 3x(x + 2i)(x - 2i)$$

Ejemplo 3

- Si -1 es un cero de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$, encuentre todos los restantes ceros y expréselo como un producto de factores lineales con coeficientes reales o complejos:
- Solución:
- Si -1 es cero, los otros ce se encuentran buscando la función g(x) tal que:

$$f(x) = (x+1)g(x)$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 4x + 4}{x + 2} = g(x)$$

Usando la división sintética encontramos que … $\frac{x^3 + x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x^2 + 4$

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 4)$$

Por tanto, los ceros son $-1, 2i$ y $-2i$

Y la factorización como producto de factores lineales es:

$$f(x) = (x + 1)(x - 2i)(x + 2i)$$

Teorema de ceros racionales

- Sea f una función polinómica con coeficientes enteros

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- entonces todos sus ceros racionales serán de la forma $\dfrac{p}{q}$ tal que:
  - $\boldsymbol{p}$ es un factor del término constante $\boldsymbol{a_0}$
  - $\boldsymbol{q}$ es un factor del coeficiente del término que determina el grado del polinomio $\boldsymbol{a_n}$

Ejemplo 4

- Encuentre los ceros racionales de: $f(x) = x^3 - 3x - 2$
- Solución:
- Si $\frac{p}{q}$ es un cero racional de f, entonces

$$p = \pm 1, \pm 2 \qquad q = \pm 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$$

- Probar cada valor

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) - 2 = -4 \qquad f(2) = (2)^3 - 3(2) - 2 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0 \qquad f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 2 = -4$$

- Los ceros son -1, 2

Una **función racional** es una función de la forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ son funciones polinómicas. El dominio consiste de todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador q es 0.

FUNCIONES RACIONALES

Ejemplo 5

(a) $$R(x)=\frac{x+1}{x^2+8x+12}=\frac{x+1}{(x+6)(x+2)}$$

Dominio son los números reales x excepto -6, -2.

$$(-\infty,-6)\cup(-6,-2)\cup(-2,\infty)$$

(b) $$R(x)=\frac{x-4}{x^2-16}=\frac{x-4}{(x-4)(x+4)}$$

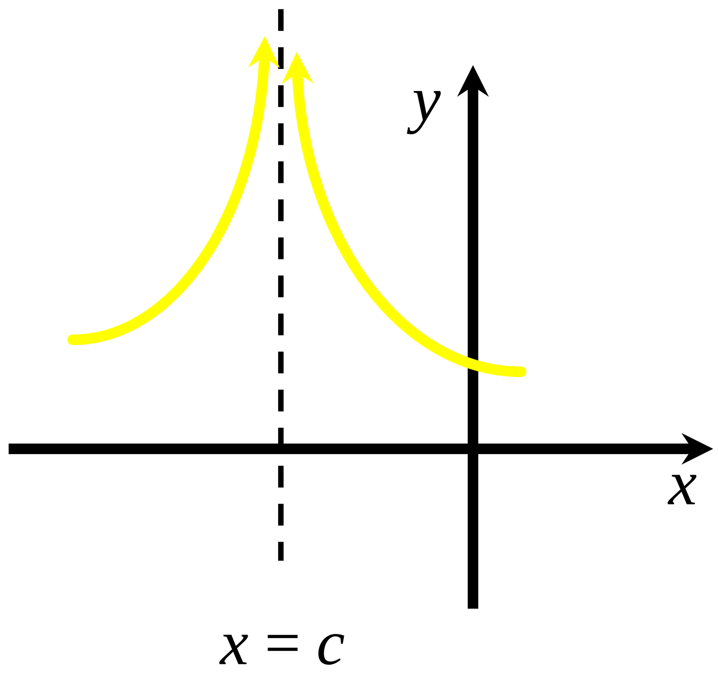
Dominio son los números reales x excepto 4 y -4

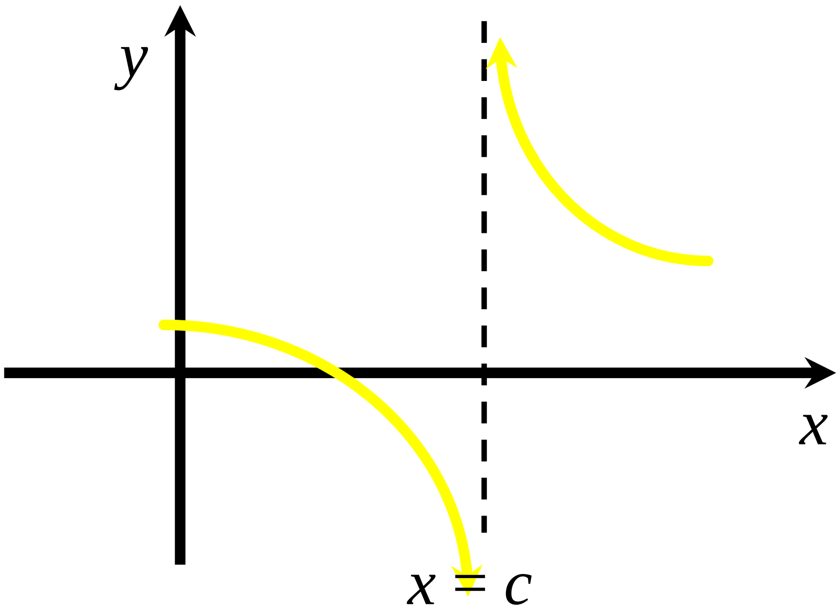
$$(-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,\infty)$$

(c) $$R(x)=\frac{5}{x^2+9}$$

Dominio son todos los números reales $(-\infty,\infty)$

Asíntotas Verticales





Mientras

$$x \to c \qquad R(x) \to +\infty$$

$$x \to c^{-} \qquad R(x) \to -\infty$$

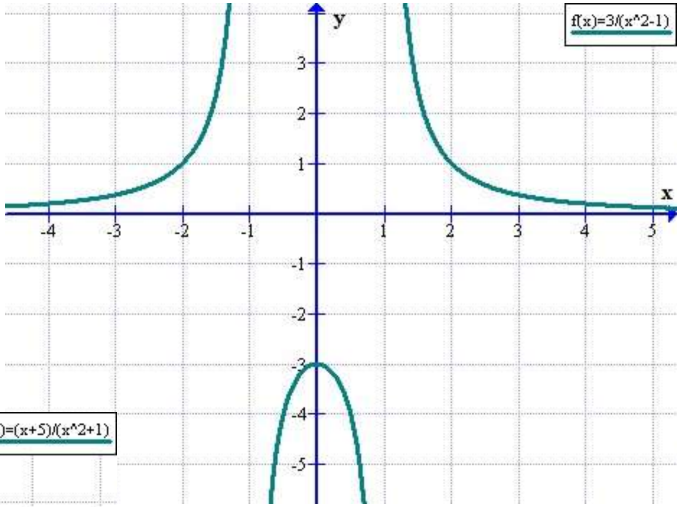
$$x \to c^{+} \qquad R(x) \to +\infty$$

$x = c$ es una asíntota vertical

Teorema (Asíntota verticales)

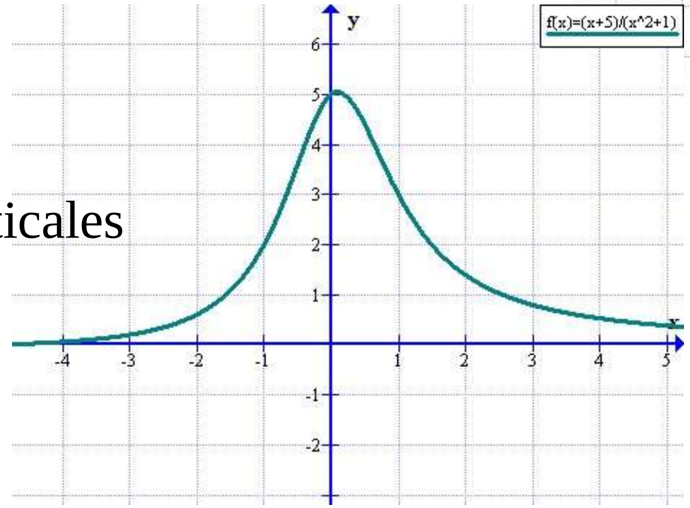
- Sea *R(x)* una función racional expresada en la forma mas simple. Entonces *R(x)* tendrá una asíntota vertical en $x = r$, si $(x - r)$ es un factor del denominador.

$$\text{(a)}\quad R(x) = \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{3}{(x-1)(x+1)}$$



Asíntota vertical en : x = -1 , x = 1

$$\text{(b)}\quad R(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$



No hay asíntotas verticales

Ejemplo 4

- Encuentre las asíntotas verticales:

$$R(x) = \frac{x+1}{x^2+8x+12}$$

$$= \frac{x+1}{(x+6)(x+2)}$$

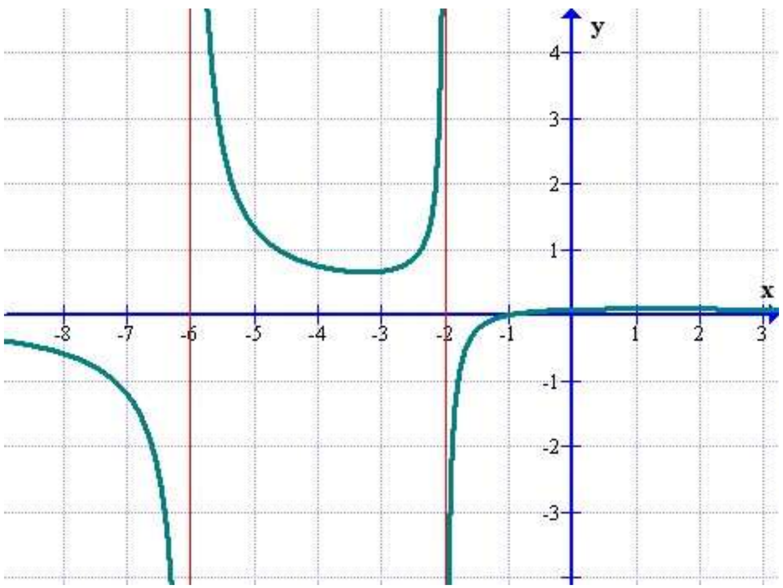
$$R(x) = \frac{x-3}{x^2+x-12} = \frac{x-3}{(x-3)(x+4)}$$

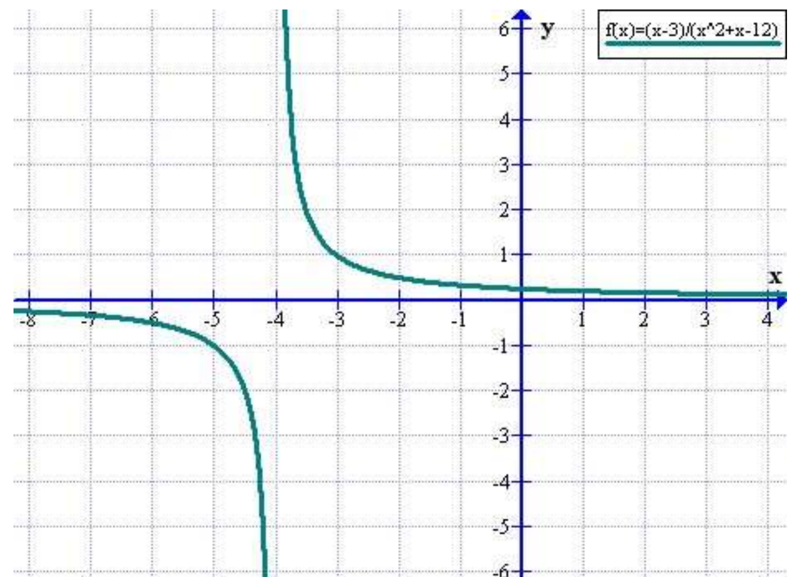
¡*R(x)* tiene que estar expresada en forma reducida!

$$= \frac{1}{x+4}$$

Las asíntotas verticales son: $x = -6$, $x = -2$

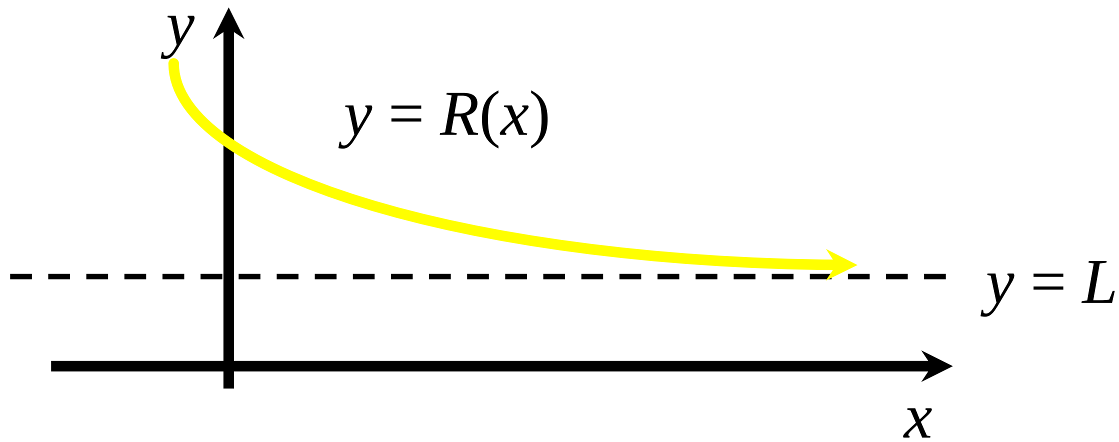
La asíntota vertical es: $x = -4$



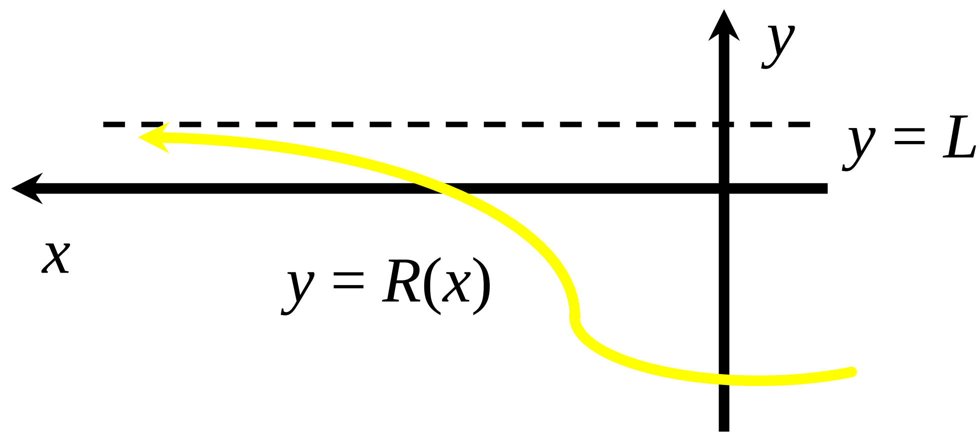


Asintotas horizontales

- Mientras $x \to +\infty \quad R(x) \to L$



- Mientras



$x \to -\infty \quad R(x) \to L$

Teorema (Asíntota horizontal)

Considera la función racional: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

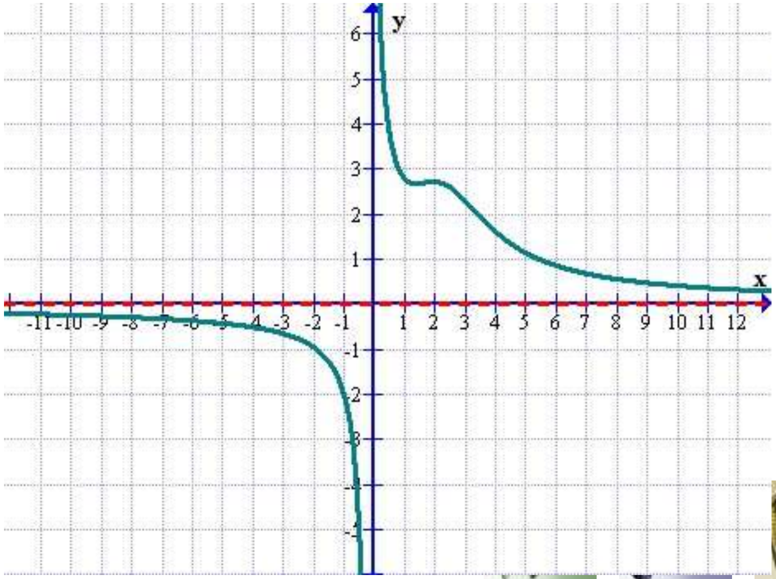
Donde n, m son los grados de los polinomios $p(x),\ \ q(x)$ respectivamente. Entonces:

1. Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

Ejemplo:

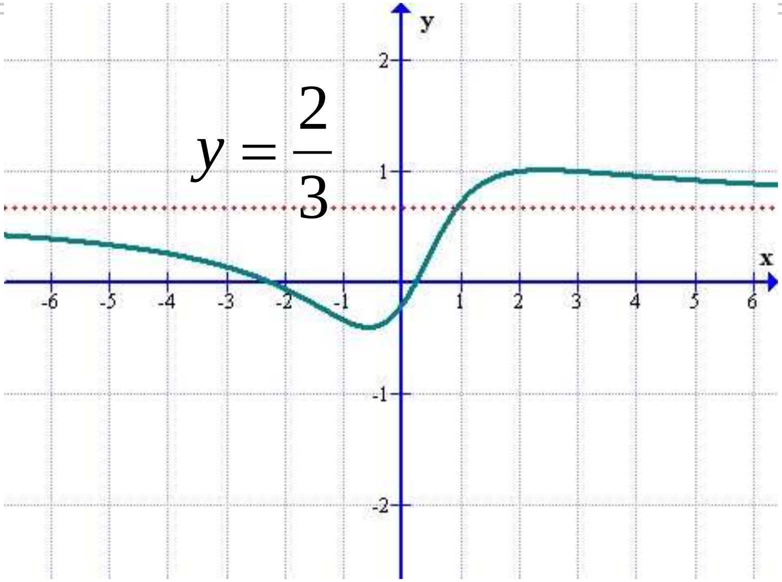
$$R(x) = \frac{3x^2 - 4x + 15}{x^3 - 4x^2 + 7x + 1}$$

Asíntota horizontal: $y = 0$



Teorema (Asíntota horizontal) - Ejemplos 6, 7

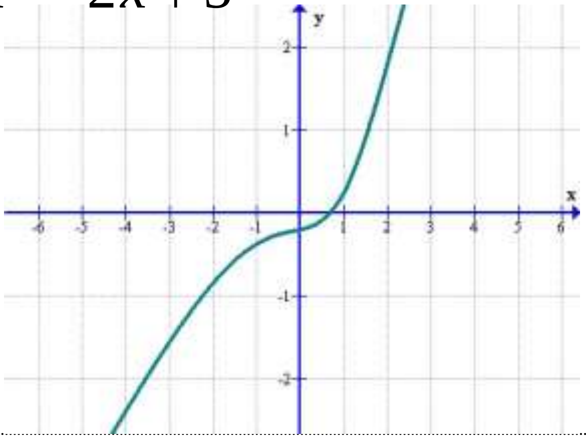
- 2. Si $n = m$, entonces $y = a_n / b_m$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.
- Ejemplo 6: $R(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x + 5}$

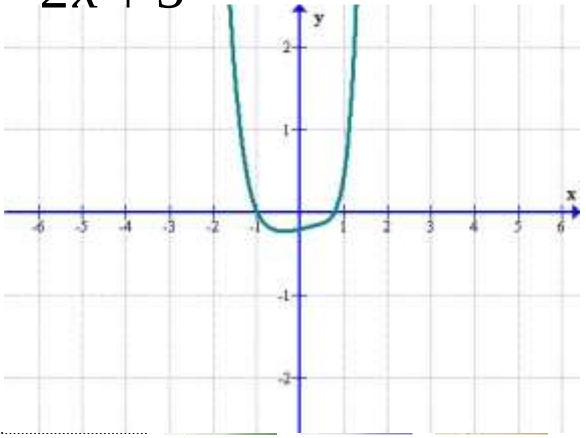


- 3. Si $n > m$ no tiene asíntota horizontal. Ejemplo 7:

$$R(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 5}$$

$$R(x) = \frac{2x^6 + x^5 - x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 5}$$





Ejercicios del Texto 3.4

Problemas 5-10: Haga una lista de todos los posibles ceros racionales. Pero, no pruebe si lo son

5. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

6. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$

7. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$

8. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$

9. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$

10. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

Problemas 15-19: Todos los ceros reales del siguiente polinomio son enteros, Encuentre todos los ceros y escriba el polinomio en forma factorizada.

15. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

16. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 19x - 14$

17. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

18. $P(x) = x^3 - 3x - 2$

19. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Problemas 29-44: Encuentre todos los ceros racionales y escriba el polinomio en forma factorizada

29. $P(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$

31. $P(x) = 3x^4 - 10x^3 - 9x^2 + 40x - 12$

32. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

34. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

35. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

39. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

Problemas 45-54: Encuentre todos los ceros reales. Si es necesario, use la fórmula cuadrática.

46. $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 7x + 15$

47. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$

48. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

49. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$

Problemas 55-62: a) Encuentre todos los ceros reales

57. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

58. $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

Ejercicios del Texto 3.5

Problemas 7-18: (a) Encuentre todos los ceros P, real y complejos, (b) Factorice P completamente

7. $P(x) = x^4 + 4x^2$ **8.** $P(x) = x^5 + 9x^3$

9. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ **10.** $P(x) = x^3 + x^2 + x$

11. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ **12.** $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

Problemas 19-36: Factorice completamente y encuentre todos sus ceros. Identifique la multiplicidad de cada cero

19. $P(x) = x^2 + 25$ **20.** $P(x) = 4x^2 + 9$

21. $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ **22.** $Q(x) = x^2 - 8x + 17$

23. $P(x) = x^3 + 4x$ **24.** $P(x) = x^3 - x^2 + x$

25. $Q(x) = x^4 - 1$ **26.** $Q(x) = x^4 - 625$

27. $P(x) = 16x^4 - 81$ **28.** $P(x) = x^3 - 64$

29. $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$ **30.** $P(x) = x^6 - 729$

33. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$ **34.** $P(x) = x^5 + 7x^3$

Problemas 37-46: Encuentra un polinomio con coeficientes enteros que satisface la condición dada:

37. P has degree 2 and zeros $1 + i$ and $1 - i$.

Problemas 47-64: Encuentre todos los ceros del polinomio

47. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

48. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$

49. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

50. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 18x + 18$

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

52. $P(x) = x^3 - x - 6$

Ejercicios del Texto 3.6

Problemas 13-20: Use transformaciones de la gráfica y=1/x para graficar la función racional siguiente. Identifique su dominio y rango.

13. $r(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ **14.** $r(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

15. $s(x) = \dfrac{3}{x + 1}$ **16.** $s(x) = \dfrac{-2}{x - 2}$

Problemas 21-26: Encuentre los interceptos en x e interceptos en y de las funciones racionales.

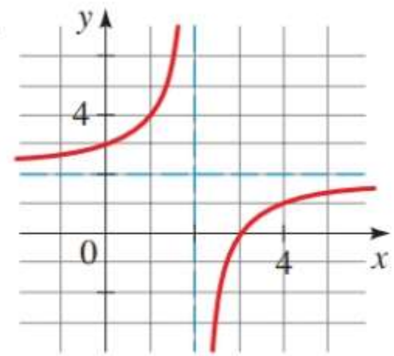
21. $r(x) = \dfrac{x - 1}{x + 4}$ **22.** $s(x) = \dfrac{3x}{x - 5}$

23. $t(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 6}$ **24.** $r(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3x}$

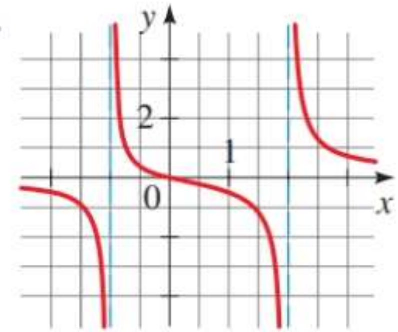
Problemas 31-42: Encuentre las asíntotas verticales y horizontales, si las tiene

Problemas 27-30: De la gráfica determine los interceptos en x, y. Además, las asíntotas verticales y horizontales

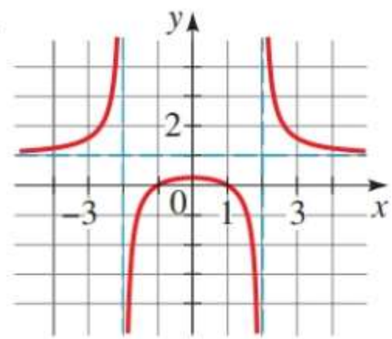
27.



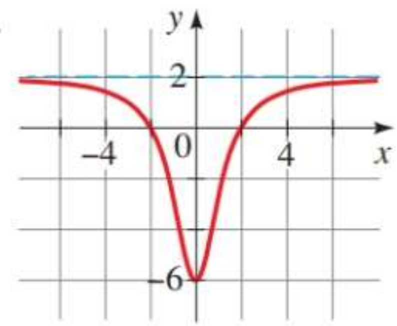
28.



29.



30.



Ejercicios del Texto 3.6 …

Problemas 31-42: Encuentre las asíntotas verticales y horizontales, si las tiene

31. $r(x) = \dfrac{5}{x-2}$

32. $r(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-1}$

33. $r(x) = \dfrac{3x+1}{4x^2+1}$

34. $r(x) = \dfrac{3x^2+5x}{x^4-1}$

35. $s(x) = \dfrac{6x^2+1}{2x^2+x-1}$

36. $s(x) = \dfrac{8x^2+1}{4x^2+2x-6}$

37. $r(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{(x-2)(4x+7)}$

38. $r(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{(5x+1)(2x-3)}$

39. $r(x) = \dfrac{6x^3-2}{2x^3+5x^2+6x}$

40. $r(x) = \dfrac{5x^3}{x^3+2x^2+5x}$

41. $t(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

42. $r(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

Problemas 43-62: Encuentre los interceptos y las asíntotas. Luego, bosqueja la gráfica de la función racional e identifique su dominio y rango. Use un graficador para confirmar tu respuesta

43. $r(x) = \dfrac{4x-4}{x+2}$

44. $r(x) = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

49. $s(x) = \dfrac{4x-8}{(x-4)(x+1)}$

50. $s(x) = \dfrac{6}{x^2-5x-6}$

51. $s(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+x-2}$

52. $s(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-1)}$

55. $r(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$

56. $r(x) = \dfrac{3x^2+6}{x^2-2x-3}$

Problemas 63-68: Encuentre los factores que son comunes en el numerador y denominador. Luego, encuentre los interceptos y asíntotas, bosqueje la gráfica de la función racional. Identifique el dominio y rango de la función

63. $r(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$

64. $r(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{(x+1)(x-3)(x+5)}$

65. $r(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$