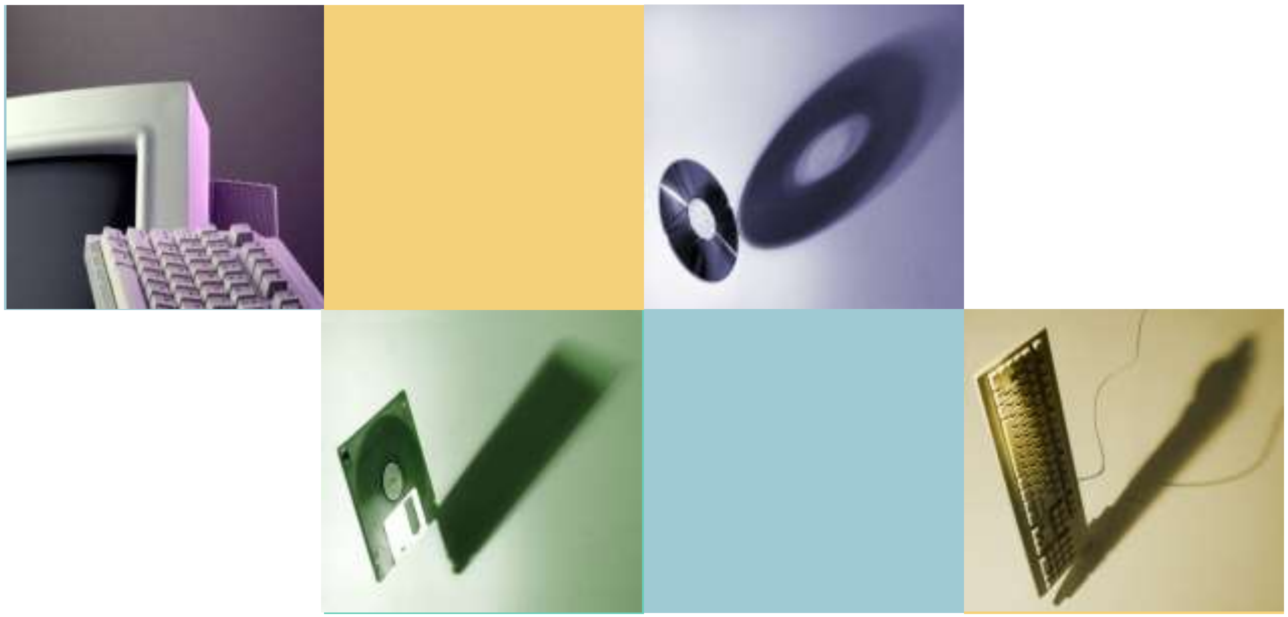
Unidad 1 – Lección 1.2



Funciones Logarítmicas

Actividades 1.2

- **Referencias:** Capítulo 4 - Sección 4.2 Funciones Logarítmicas;
  - Ejercicios de Práctica:
    - Páginas 349, 350 y 351: Impares 1–45. Use GRAPH par las gráficas de 49 – 57; 59 – 63
  - **Asignación**: Acceder KhanAcademy – Algebra II Logaritmos ; Ver video Logaritmos; Hacer ejercicios Evaluando Logaritmos y Evaluando Logaritmos 2; Writing Logarithms and Exponential Form; Ver video Propiedades de Logarítmos: Introducción a las propiedades de logaritmo; Logaritmos de una potencia, Suma de logaritmos con la misma base; Utilizando las propiedades del logaritmo para simplificar.
- **Referencias del Web:**
  - Khan Academy – Algebra II Logaritmos ; Propiedades de Logarítmos
  - College Algebra Tutorial: Logarithmic Functions
  - Videos – Cambiar a logarítmitca; Cambiar a forma exponencial

Definición de logaritmos

- Sea $a > 0$ and $a \neq 1$. Entonces, **el logaritmo con base a de un número x …**

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

- Ejemplos:

$$\log_{10} 100 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 10^2 = 100$$

$$\log_4 64 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^3 = 64$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

Ejemplo 1

- Escriba los siguientes enunciados en forma logarítmica:

1. $6^3 = 216$ ⇨ $\log_6 216 = 3$
2. $2^{-3} = 0.125$ ⇨ $\log_2 0.125 = -3$
3. $7^3 = 343$ ⇨ $\log_7 343 = 3$
4. $e^{0.5x} = t$ ⇨ $\log_e t = 0.5x$ o $\ln t = 0.5x$

- Escriba los siguientes enunciados en forma exponencial y determine el valor de x:

$$\log_5 125 = x \qquad \log_4 x = 2 \qquad \log_x 243 = 5$$

$$125 = 5^x \qquad x = 4^2 \qquad 243 = x^5$$

$$5^3 = 5^x \qquad x = 16 \qquad 3^5 = 3^x$$

$$x = 3 \qquad x = 5$$



Ejercicio #1

- Escriba los siguientes enunciados en forma exponencial y determine el valor de x:

$$\log_2 32 = x$$

$$32 = 2^x$$

$$2^5 = 2^x$$

$$x = 5$$

$$\log_4 \sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{2} = 4^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2} = 2x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Cálculo de logaritmos

- La mayoría de calculadoras realizan el cálculo de logaritmos de base 10 (log x) o de base e (ln x).

  log (10.5) ≈ 1.021189299

  ln (0.0025) ≈ -5.991464547

- Para calcular logaritmos de otras base usamos la siguiente igualdad:

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} = \frac{\ln M}{\ln a} = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$log_5 63 = \frac{\log 63}{\log 5} \approx 2.574274344$$

$$log_5 63 = \frac{\ln 63}{\ln 5} \approx 2.574274344$$

Aproxime a la milésima más cercana:

$$\log_8 0.0035 \approx -2.719$$

$$\log_5 3.05 \approx 0.693$$



Ejercicios #2

- Resuelva la ecuación:

$$\log_3(2x-1)=2$$

$$2x-1=3^2$$

$$2x-1=9$$

$$x=5$$

- Aproxime los siguientes logarítmos a la milésima más cercana:

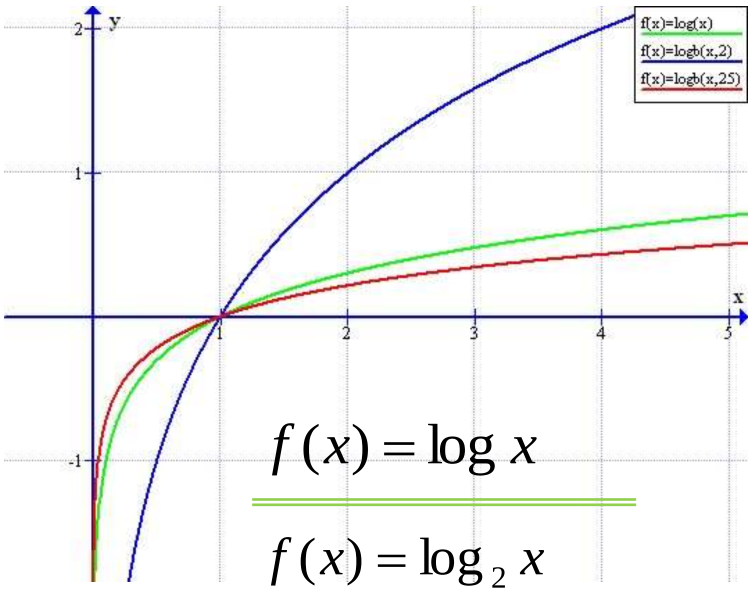
$$\log_8 0.0035 \approx -2.719$$

$$\log_5 3.05 \approx 0.693$$

La Función Logarítmo (base > 1)

$$f(x) = \log_a x$$

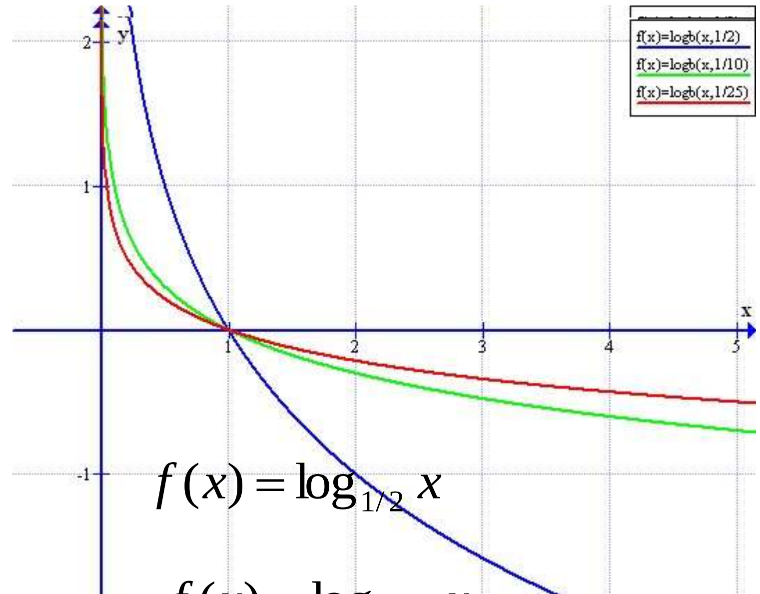
- Si a > 1, la función logarítmo es creciente.
- Si 0< a < 1, la función logarítmo es decreciente.



$$f(x) = \log x$$

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_{25} x$$



$$f(x) = \log_{1/2} x$$

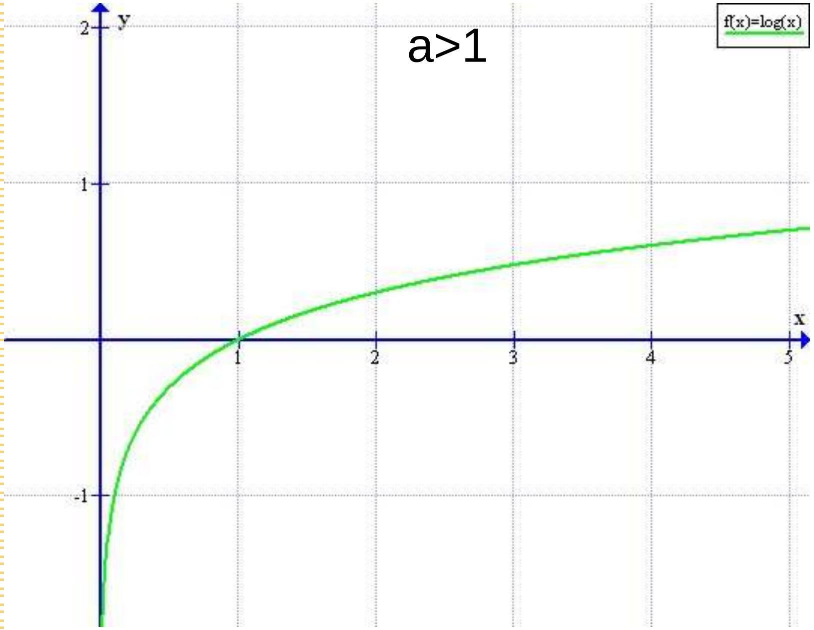
$$f(x) = \log_{1/10} x$$

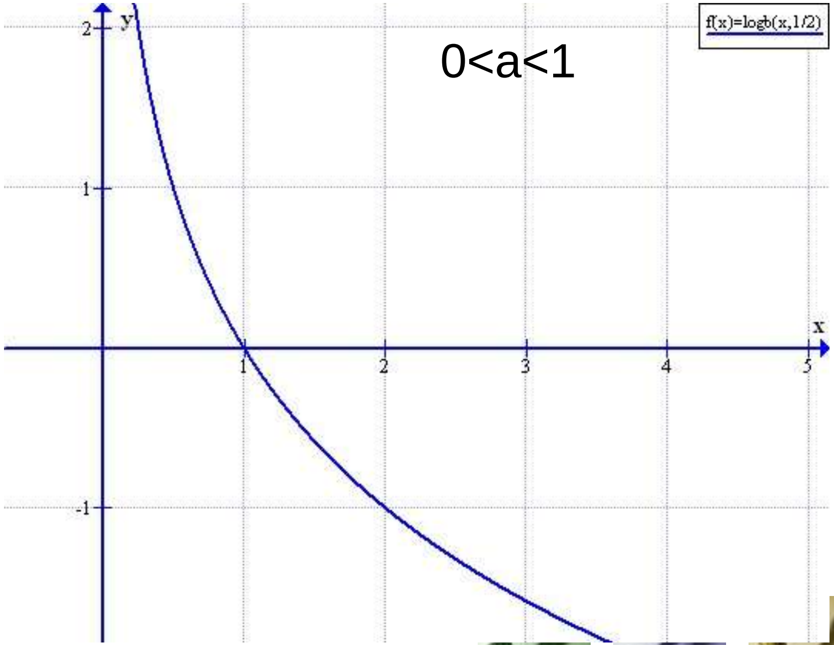
$$f(x) = \log_{1/25} x$$

En GRAPH entre **log(x)** para la función con base 10 y use el formato **logb(x, *a*)** para la función con base *a*.

Características de las funciones con logarítmos

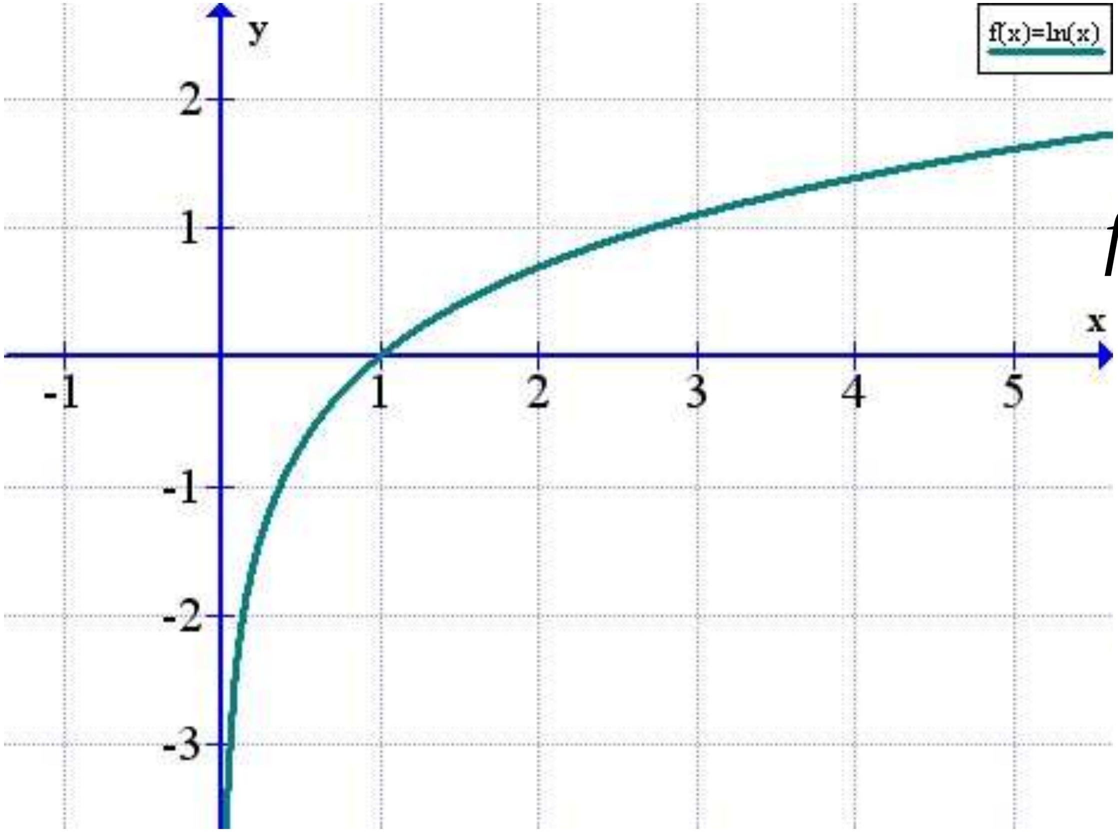
- Dominio = (0,∞) , Rango = (-∞, ∞)
- El intercepto en x ocurre en (1,0).
- No hay intercepto en y.
- El eje vertical, $x = 0$, es un asíntota vertical de su gráfica.





Función Logaritmo natural

- $y = \ln x$ si y sólo si $e^y = x$



$$f(x) = \ln x$$

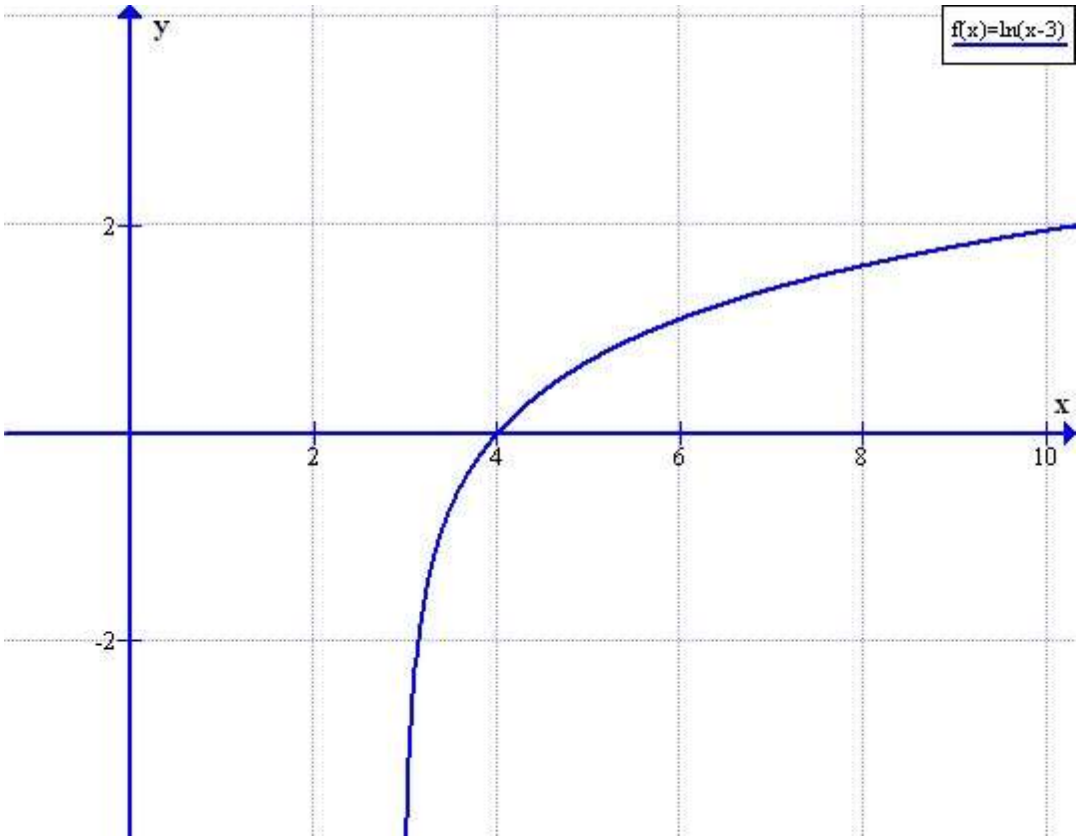
En GRAPH entre **ln(x)** para la función con base e.

En EXCEL entre **LN(x)** para la función logaritmo con base e.

Ejemplo 4

- ¿Cuál es el dominio, recorrido y asíntota de:

$$f(x) = \ln(x-3)$$



Dominio : $(3, \infty)$

Recorrido : $(-\infty, \infty)$

Asíntota : $x = 3$

Ejemplo 5

- Exprese en notación exponencial y resuelva por x:

$$\ln e^{-2x} = 8$$

$$e^{-2x} = e^{8}$$

$$-2x = 8$$

$$x = -4$$

Ejemplo 6

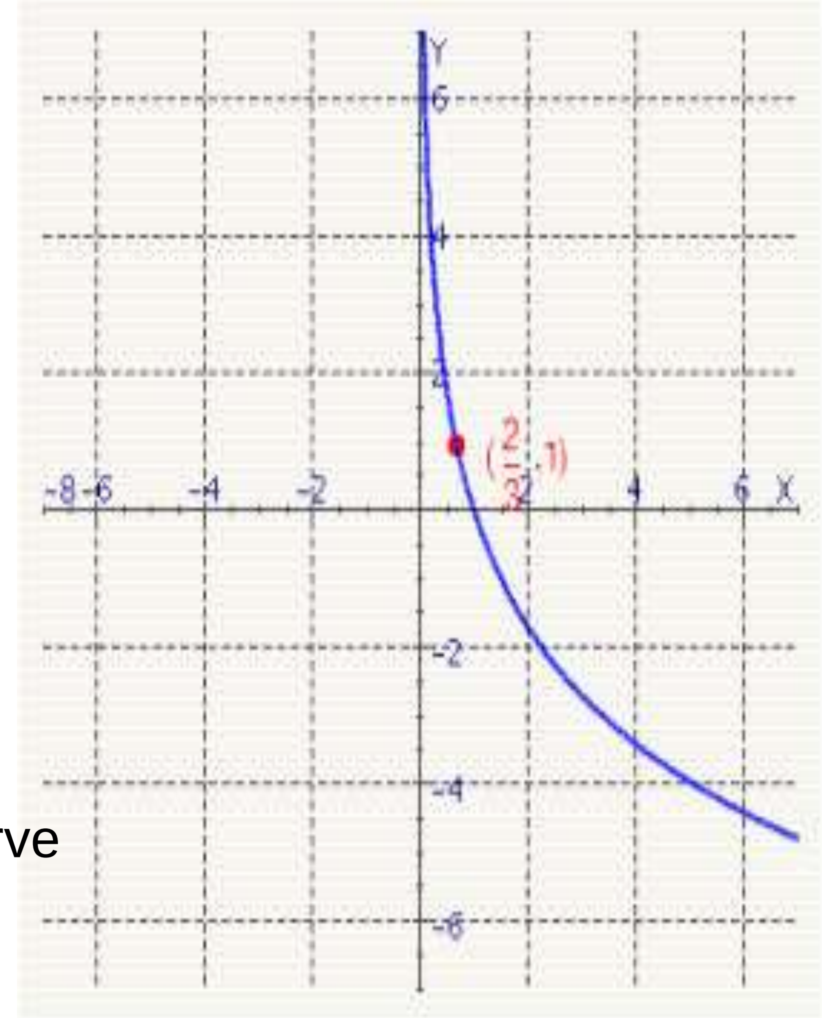
- Determine la función logarítmica cuya gráfica es:

a) $y = \ln \frac{\sqrt{2}}{3} x$

b) $y = \log \frac{2}{3} x$

c) $y = \frac{3}{2} \log_4 x$

d) ninguna de las anteriores



Solución Correcta:
d) Ninguna de las anteriores. Observe que la la gráfica muestra que es un logarítmo con base menor que 1.

Propiedades básicas de Logaritmos

$$log_a 1 = 0$$

$$log_a a = 1$$

$$Si\ log_a(u) = log_a(v)\ si\ y\ sólo\ si\ u = v$$

- Ejemplo: Resuelva por x:

$$\log_4(2x-1) = \log_4(x+5)$$

$$2x-1 = x+5$$

$$2x - x = 5+1$$

$$x = 6$$

Propiedades de Logaritmos

1. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
2. $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$
3. $\log_a(1/v) = - \log_a v$
4. $\log_a(u^n) = n \log_a(u)$

Ejemplo 7

Expande las siguientes expresiones logarítmicas

a) $\log_3(9x) = \log_3 9 + \log_3 x$

$$= 2 + \log_3 x$$

b) $\log_2(x^3y^5) = \log_2 x^3 + \log_2 y^5$

$$= 3\log_2 x + 5\log_2 y$$

c) $\ln\left(\dfrac{xy}{\sqrt[5]{z}}\right) = \ln xy - \ln \sqrt[5]{z} = \ln x + \ln y - \ln z^{1/5}$

$$= \ln x + \ln y - \frac{1}{5}\ln z$$

Ejemplo 8

- Combine las expresiónes a un solo logarítmo:

$$4\log x + \frac{1}{2}\log(x-1)$$

$$= \log x^4 + \log(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log\left[x^4(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \log\left[x^4\sqrt{x-1}\right]$$

$$4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$$

$$= \log x^4 - \log(x^2+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^2$$

$$= \log\left[\frac{x^4}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right] + \log(x-1)^2$$

$$= \log\left[\frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right]$$

Ejercicios #3

- Expande

$$\ln\left(\frac{3x^2}{(x+1)^{10}}\right)$$

$$= \ln 3x^2 - \ln(x+1)^{10}$$

$$= \ln 3 + \ln x^2 - \ln(x+1)^{10}$$

$$= \ln 3 + 2\ln x - 10\ln(x+1)$$

Combina

$$4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$$

$$= \log x^4 - \log(x^2+1)^{\frac{1}{3}} + \log(x-1)^2$$

$$= \log\left[\frac{x^4}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right] + \log(x-1)^2$$

$$= \log\left[\frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}\right]$$



Problema de Aplicación (Fechado de Carbono)

La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de $carbono\ 14$ radioactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de $carbono\ 14$ y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por:

$$A = -8267\, ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de $carbono\ 14$ que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0

Solución:

$$A = -8267\, ln\left(\frac{73}{100}\right)$$

$$\approx -8267\,(-0.314710745)$$

$\approx$ 2601.713728

$\approx$ 2602 años