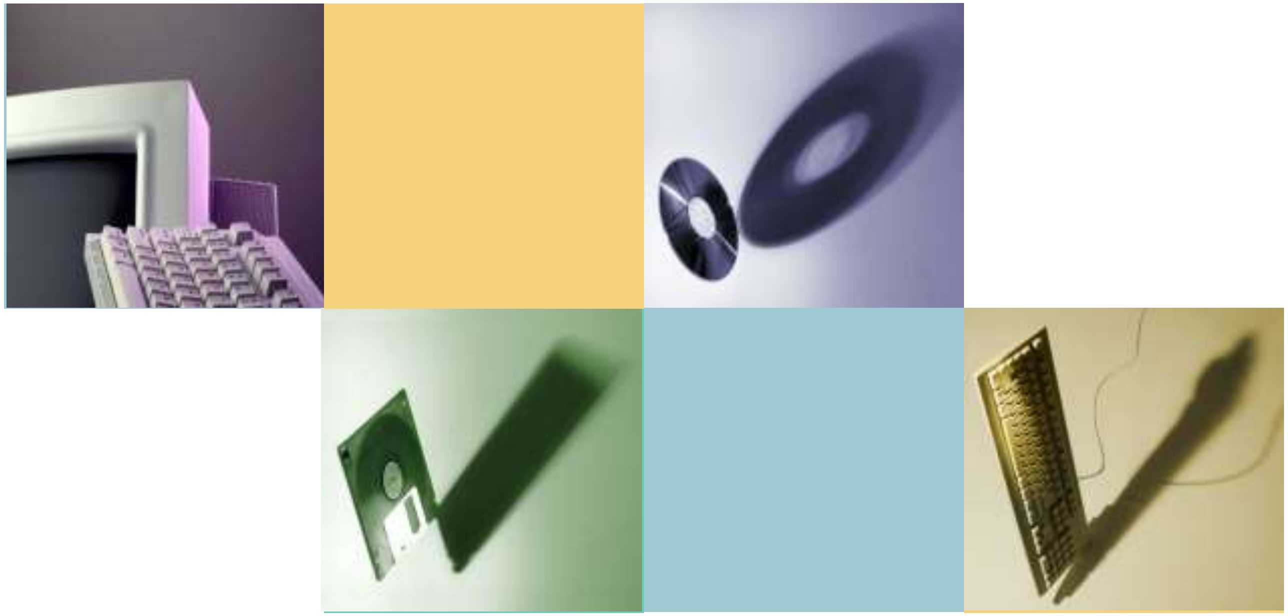
Unidad 2 – Lección 2.2



El Círculo Unitario y las Funciones Trigonométricas

Actividades 2.2

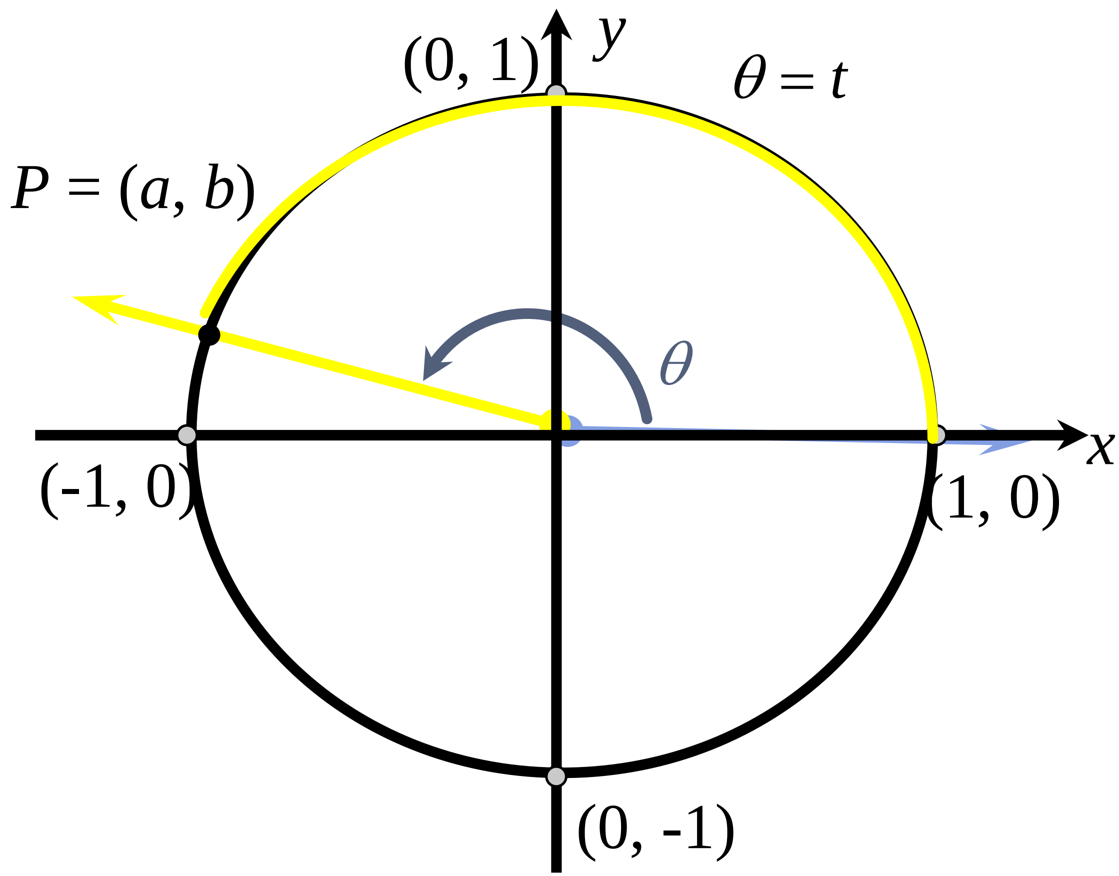
- ***Referencia:***
  Capítulo 5 - Sección 5.1 Circulo Unitario; Sección 5.2 Funciones trigonométricas de números reales
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 406 - 407: Impares 1– 49; Páginas 416 -417: Impares 1– 69.
- **Asignación 2.1:** Ver todos los videos Khan Academy de la sección: La definición de las funciones trigonométricas usando la circunferencia unitaria: "Trig problems on the unit circle"
- **Referencias del Web:**
  - Khan Academy: La definición de las funciones trigonométricas usando la circunferencia unitaria
  - **Toro, Nilsa – Funciones Circulares**
  - **Toro, N;Trigonometría: El Círculo Unitario y puntos circulares**
  - **Math Learning. Net - Interactive Unit Circle.**
  - **Video: Funciones Trigonométricas; Marta Rosas**

El Círculo Unitario

Círculo de radio 1 con centro en el punto origen.

Tiene interceptos en (0,1), (-1,0), (0,-1) y (1,0).

Asociado al número real t y el ángulo θ medido en radianes hay un punto P(a, b) que satisface ….



$$a^2 + b^2 = 1$$

Ejemplo 1

- Determine la coordenada desconocida del punto $P(x, \frac{-7}{25})$ si éste pertenece al círculo unitario y al cuadrante IV.
- Solución:
- Como P está en el círculo unitario: $a^2 + b^2 = 1$

$$a^2 + (\tfrac{-7}{25})^2 = 1$$

$$a^2 + \tfrac{49}{625} = 1$$

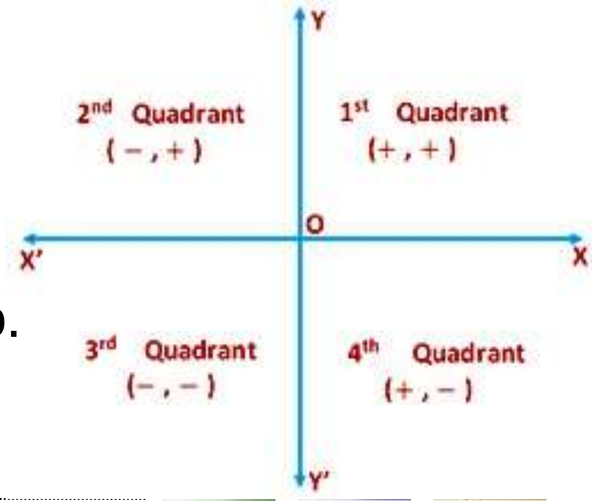
$$a^2 = 1 - \tfrac{49}{625} = \tfrac{625}{625} - \tfrac{49}{625}$$

$$a^2 = \tfrac{576}{625}$$

$$a = \pm\sqrt{\tfrac{576}{625}} \quad = \pm\tfrac{24}{25}$$

- Como P está en el cuadrante IV, a es positivo.

$$a = \frac{24}{25}$$



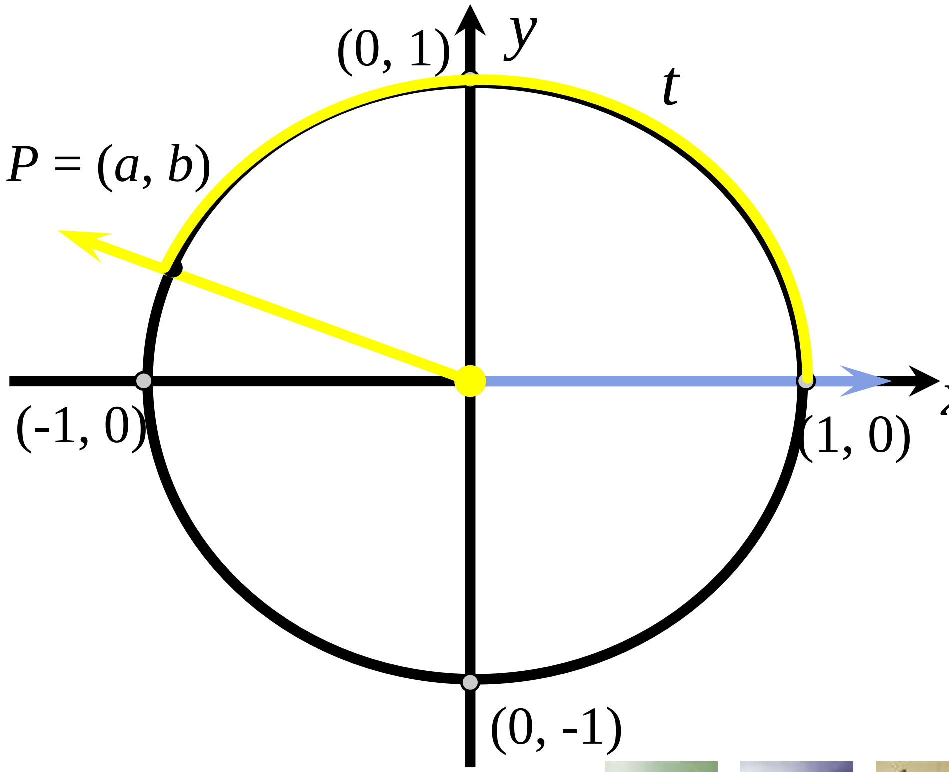
Funciones Circulares de Ángulos

- Sea ***t*** un número real y ***P* = (*a*, *b*)** un punto en el círculo unitario asociado a *t*. Entonces:

$$\text{(coseno)} \quad \cos t = a$$

$$\text{(seno)} \quad \sin t = b$$

$$\text{(tangente)} \quad \tan t = \frac{b}{a}$$



- Funciones recíprocas

$$\text{(secante)} \quad \sec t = \frac{1}{a}$$

$$\text{(cosecante)} \quad \csc t = \frac{1}{b}$$

$$\text{(cotangente)} \quad \cot t = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 2

- Sea $\left(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{15}}{4}\right)$ un punto en el círculo unitario asociado a un número real t. Determine los valores trigonométricos de t si:

- Solución:

$$\cos t = \frac{1}{4}$$

$$\sec t = \frac{1}{a} = \frac{1}{1/4} = 4$$

$$\sin t = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\csc t = \frac{1}{b} = \frac{1}{-\sqrt{15}/4} = -\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\tan t = \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{15}/4}{1/4} = -\sqrt{15}$$

$$\cot t = \frac{a}{b} = \frac{1/4}{-\sqrt{15}/4} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

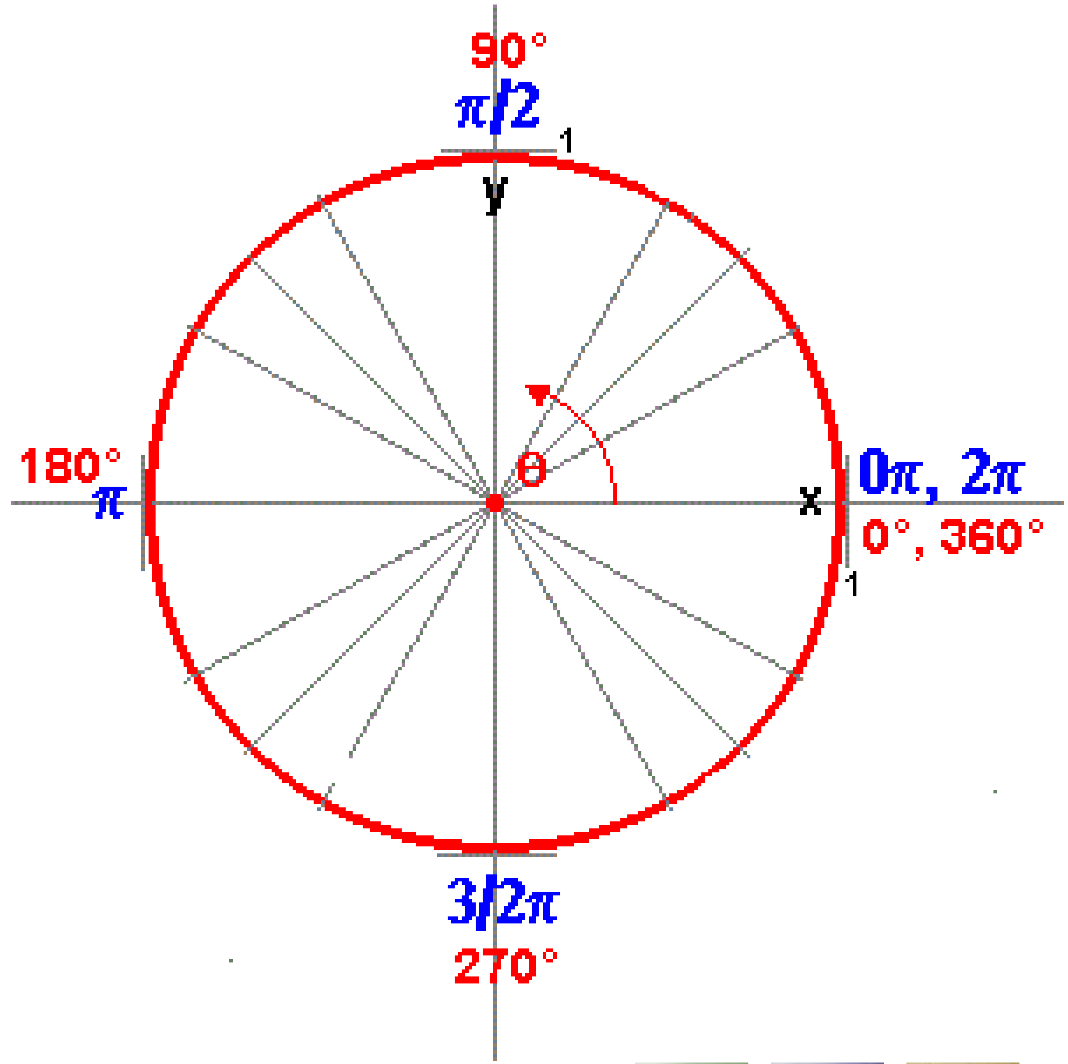
Relaciones especiales para recordar

$$90° = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow (0,1)$$

$$180° = \pi \leftrightarrow (-1,0)$$

$$270° = \frac{3\pi}{2} \leftrightarrow (0,-1)$$

$$360° = 2\pi \leftrightarrow (1,0)$$

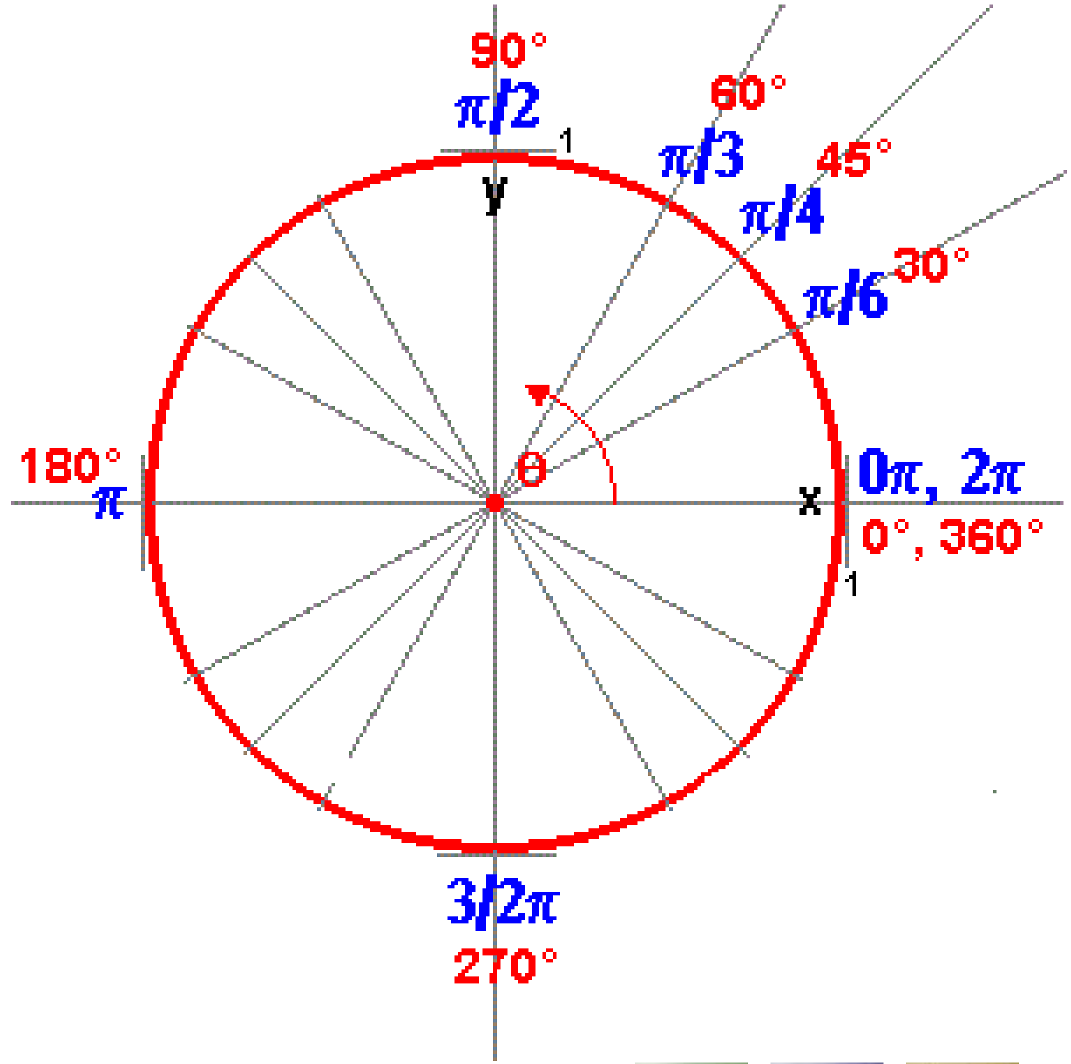


Relaciones especiales para recordar

$$30° = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

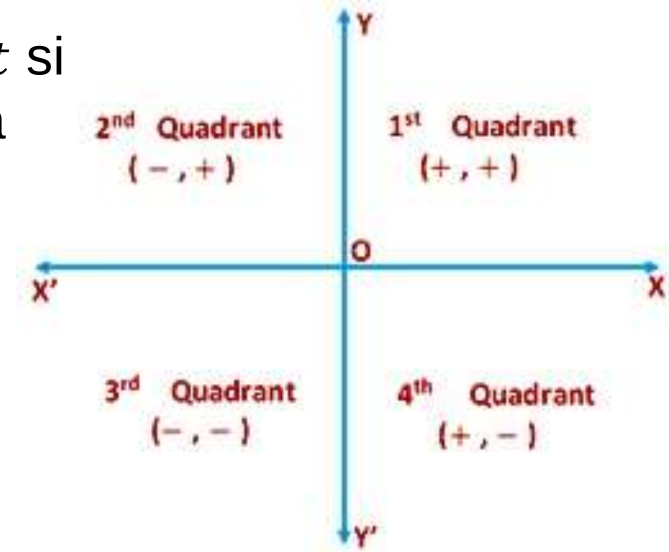
$$45° = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$60° = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$



Ejemplo 3

a) Encuentre los signos de $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$ si el lado terminal del ángulo se encuentra en el cuadrante IV.



- Solución:

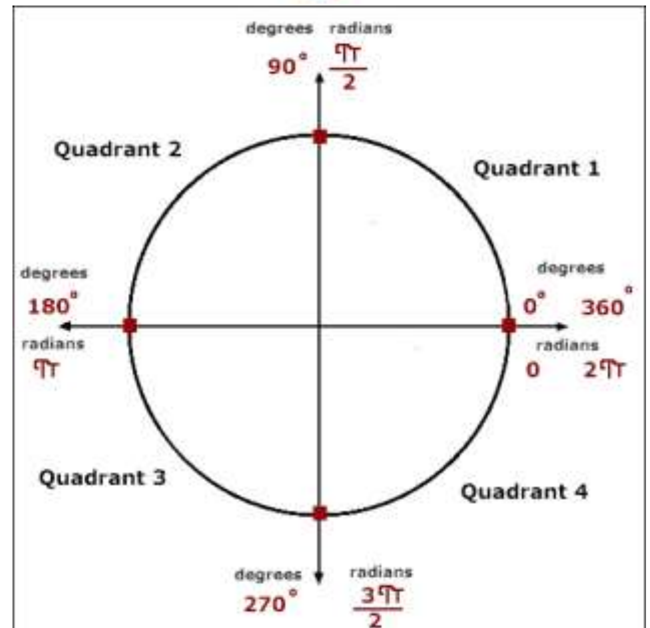
$$\cos t > 0$$

$$\sin t < 0$$

$$tan\, t < 0$$

b) Encuentre el signo de $sin\ 285°$.

$$\sin 285° < 0$$



c) Encuentre el signo de $\tan \frac{7\pi}{6}$.

$$\tan \frac{7\pi}{6} > 0$$

d) Encuentre el signo de $\cos 2$.

$$\cos 2 < 0$$

Ejemplo 4

- Use su calculadora para aproximar los siguientes valores trigonométricos a cinco lugares decimales (*Nota: – Asegúrese que su calculadora está en modalidad de radianes o grados según aplique).*

1) $\sin 5.3 \approx -0.83227$

2) $\cos 15°36'15'' \approx 0.96314$

3) $\tan \frac{\pi}{5} \approx 0.72654$

4) $\sec \frac{\pi}{5} \approx 1.23607$

5) $\cot 85° \approx 0.08749$

6) $sin^2\, 38° = (\sin 38°)^2 \approx 0.37904$

Ejemplo 5

Unos topógrafos determinan que la superficie de la base de un lago se puede expresar por una función trigonométrica f tal que la parte más alta en la orilla ocurre cuando $x = -150\ pies$. Además, que el nivel de sedimento que se ha acumulado a través de los años ha permitido que la profundidad del lago sólo sea 40 pies. Determine la profundidad de la base del lago cuando x = 200 pies.

$$\boldsymbol{f(x) = -70 + 100cos\frac{\pi}{600}(x + 150)}$$

Solución:

$$f(x) = -70 + 100cos\frac{\pi}{600}(200 + 150)$$

$$f(x) = -70 + 100cos\frac{350\pi}{600}$$

$$f(x) \approx -70 + 100(-0.258819045)$$

$$\approx -95.8819045$$

$$\approx -96\ pies$$

Recuerde poner calculadora en radianes

Identidades

- Una identidad es una ecuación que es cierta para cualquier valor que su variable pueda asumir.

Identidades del cociente

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Ejemplo 6

- Escriba cos t en términos de sen t dado que el punto asociado a t se encuentra en el cuadrante IV.
- Solución:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

$$\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$$

- Como t está en el cuadrante IV, cos t es positivo.

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

Ejemplo 7

- Si cos t = -4/5 y el punto definido por t está en el cuandrante III, determine todos los valores de las funciones trigonométricas.
- Solución:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sin^2 t + \left(\tfrac{-4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 t = 1 - \tfrac{16}{25}$$

$$\sin^2 t = \tfrac{9}{25}$$

$$\sin t = \pm\tfrac{3}{5}$$

- Como t pertenece al cuadrante III, sin t es negativo. Por tanto,

$$\sin t = \tfrac{-3}{5}$$

- Además,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{{}^{-3}/_{5}}{{}^{-4}/_{5}} = \frac{3}{5} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{{}^{-4}/_{5}} = \frac{-5}{4}$$

$$\cot t = \frac{5}{3} \qquad csc\, t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{{}^{-3}/_{5}} = \frac{-5}{3}$$