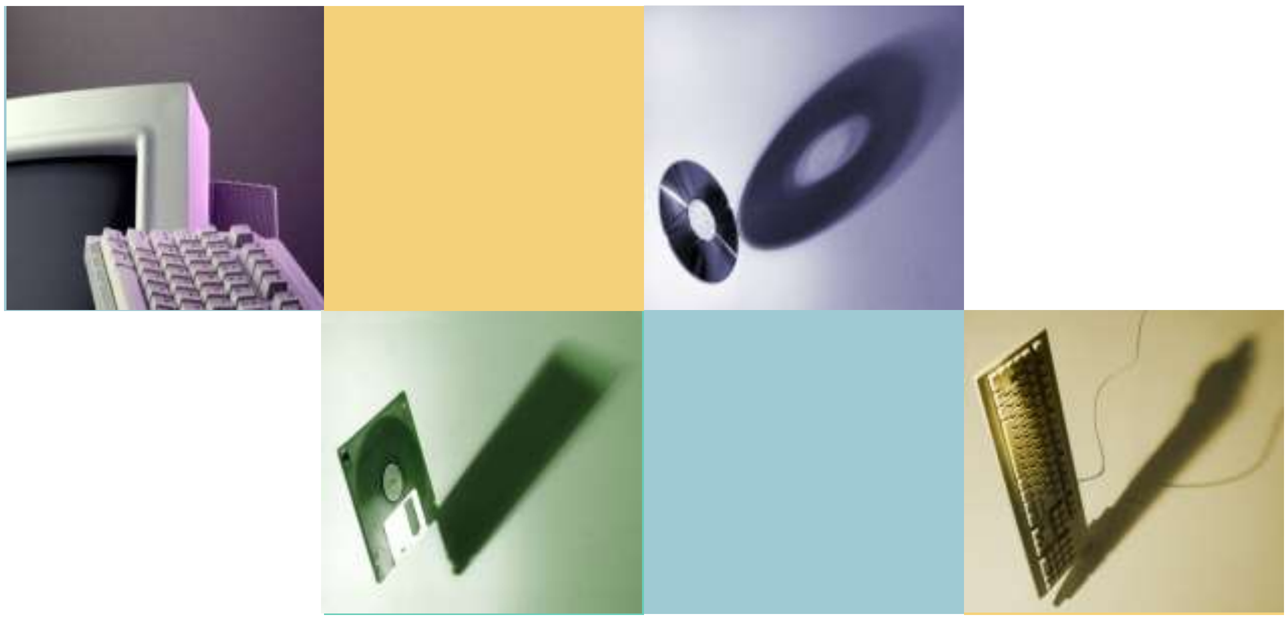
Unidad 4 – Lección 4.2



Ecuaciones Trigonométricas

Actividades 4.2

- ***Referencia:*** Capítulo 7 - Sección 7.4 Funciones trigonométricas inversas y Sección 7.5 Ecuaciones trigonométricas
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 557- 558: Impares 1– 33, 53 y 55 y Páginas 568 - 569: Impares 1– 59 (Use GRAPH para graficar)
- **Referencias del Web**:
- Tareas Plus: Introducción a las ecuaciones trigonométricas; Solución de una ecuación trigonométrica Ejemplo 1; Ejemplo 2; Ejemplo 3.
- SOS Math – Solving Trigonometric Equations Varios ejemplos para practicar y estudiar.

$$x = 0.45 \qquad \sin x = 0.45$$

$$2\,x - 1 = 0 \qquad 2\sin 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad tan^2x - 5\tan x + 6 = 0$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

… Es una ecuación entre dos expresiones que contienen valores trigonométricos …

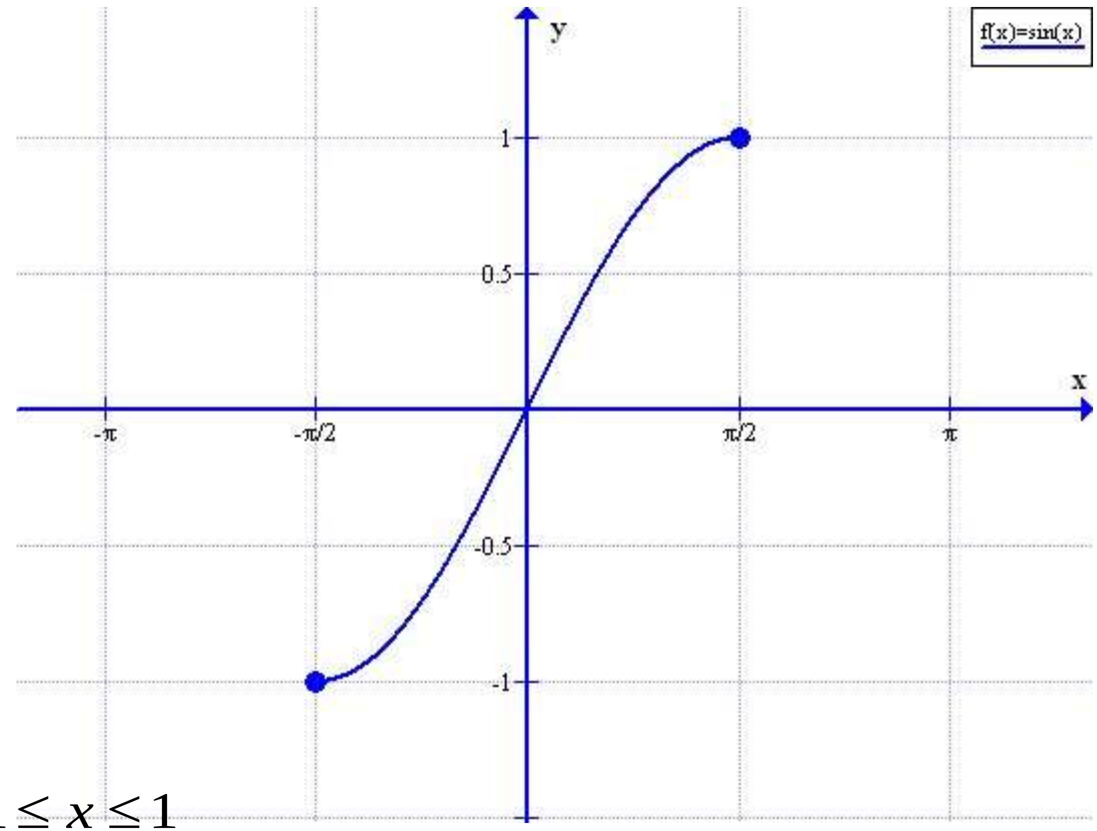
Función $y = \sin^{-1} x$

$\sin x = 0.45$

¿ $x = sin^{-1} 0.45$?

La función seno no es una función 1-1

Como la función y = sin x no es una función 1 - 1 se restringe el dominio y se define la función inversa de seno $sin^{-1}x$ de manera que:



$$y = \sin^{-1} x$$

$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

$$sin^{-1}(\sin x) \quad = \text{x} \qquad \sin(sin^{-1} x) \quad = \text{x}$$

$x = sin^{-1} 0.45 \approx 0.466765339$ Una solución.

Ejemplo 1

- Determine $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
- Como

$$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- *Entonces* $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- *Y* $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\pi}{6}$
- *En su calculadora:*

$$[\mathbf{2nd}][\boldsymbol{sin}]\mathbf{1}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{d}}\right]\mathbf{2}) = [<>]$$

Determine $sin^{-1}(0.542)$

En su calculadora …

$$[\mathbf{2nd}][\boldsymbol{sin}]\mathbf{0.542}) =$$

$$sin^{-1}(0.542) \approx 0.572815168$$

Determine el ángulo en grados tal que

$$sin^{-1}(0.8139)$$

Ajuste modalidad de su calculadora para grados. Luego, ..

$$[\mathbf{2nd}][\boldsymbol{sin}]\mathbf{0.8139}) =$$

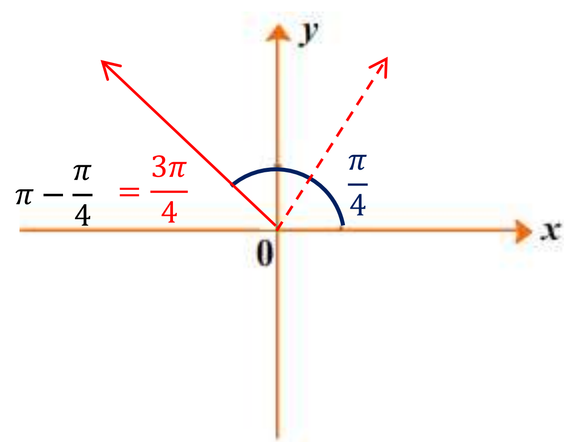
$$sin^{-1}(0.8139) \approx 54.47874114$$



Ejemplo 2

- Resuelva la ecuación en el intervalo $[0,2\pi)$ tal que: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- *Paso 1 - Encuentre el número de referencia*
- Como $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ó $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ⇨ $\frac{\pi}{4}$ es el número de referencia.
- *Paso 2 – Identifique cuadrantes que coinciden con el signo del valor trinométrico*

  Seno es positivo en el cuadrante I y II,
- *Paso 3 – Determine soluciones*
- Como senos es positivo, la primera solución coincide con el número de referencia: $\frac{\pi}{4}$. El del cuadrante II se calcula así:



Las dos soluciones son: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Ejemplo 3

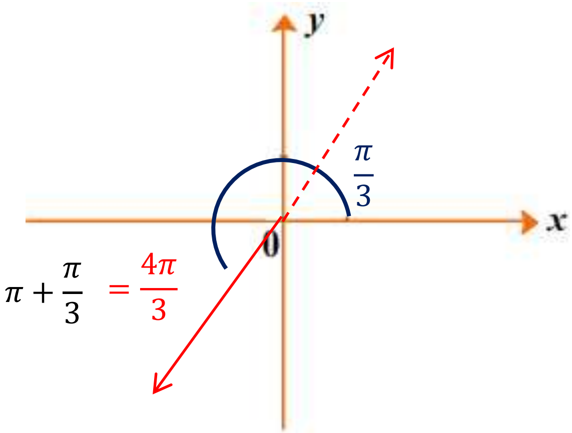
- Resuelva la ecuación en el intervalo $[0,2\pi)$ tal que: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- *Paso 1 - Encuentre el número de referencia*
- Como

$$\frac{\pi}{3} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ó \quad sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ es el número de referencia.}$$

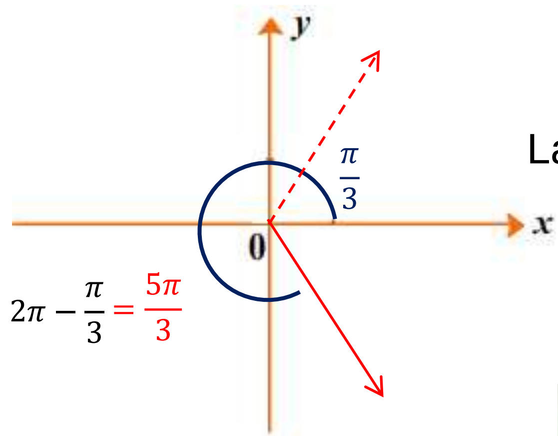
- *Paso 2 – Identifique cuadrantes*

  Seno es negativo en el cuadrante III y IV,
- *Paso 3 – Determine soluciones*

En el cuadrante III se calcula así:



En el cuadrante IV se calcula así:



Las dos soluciones son:

$$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Ejemplo 4

- Resuelva la ecuación en el intervalo $[0,2\pi)$ tal que: $\sin x = -0.85$
- *Paso 1 - Encuentre el número de referencia*
- Como

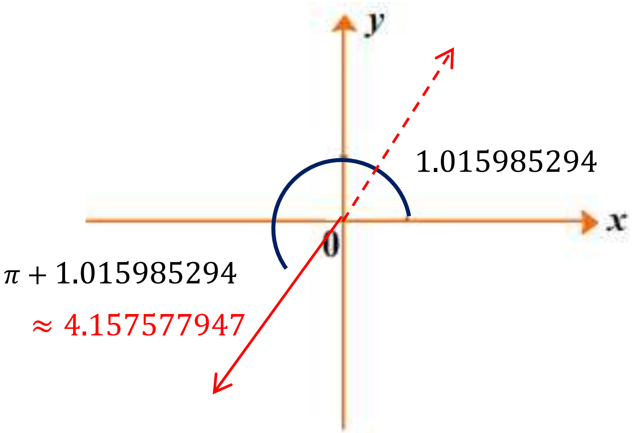
$sin^{-1}(0.85) \approx 1.015985294$ ⇨ 1.015985294 es el número de referencia (aprox.)

- *Paso 2 – Identifique cuadrantes*

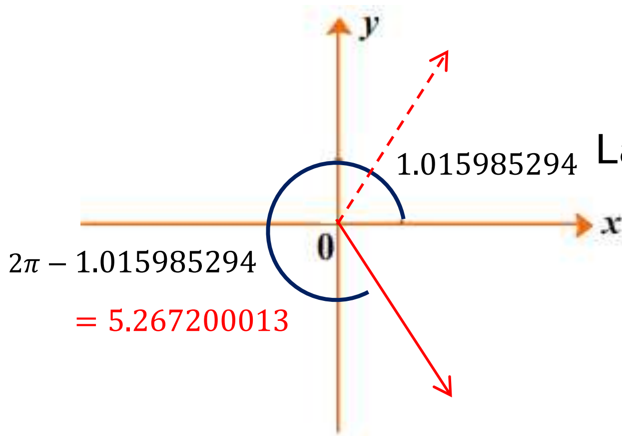
  Seno es negativo en el cuadrante III y IV,

- *Paso 3 – Determinar soluciones*

En el cuadrante III se calcula así:



En el cuadrante IV se calcula así:



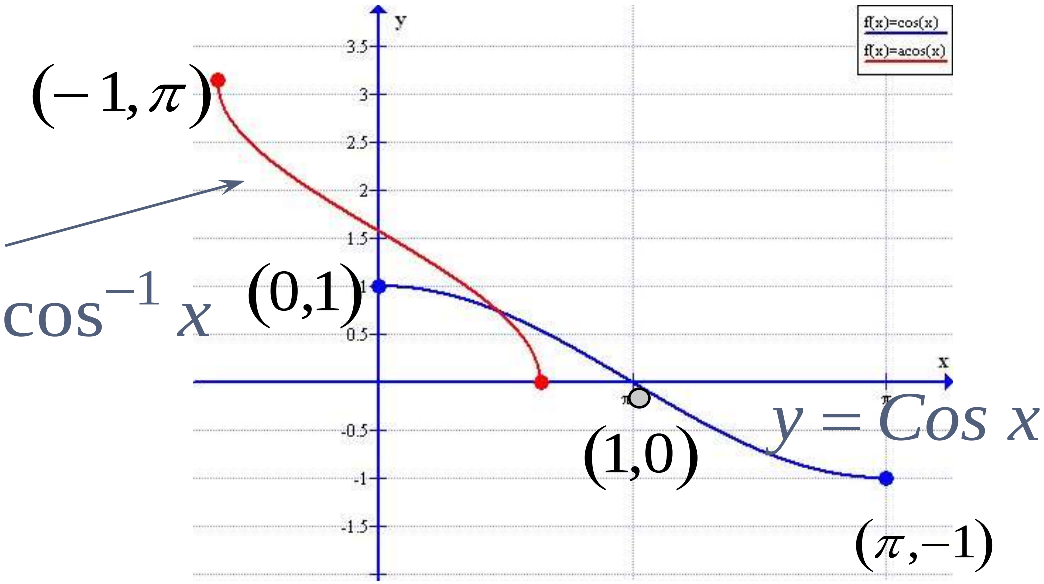
Las dos soluciones son:

$\approx 4.157577947,$
5.267200013

La funciones y = cos^{-1} x, y = tan^{-1} x

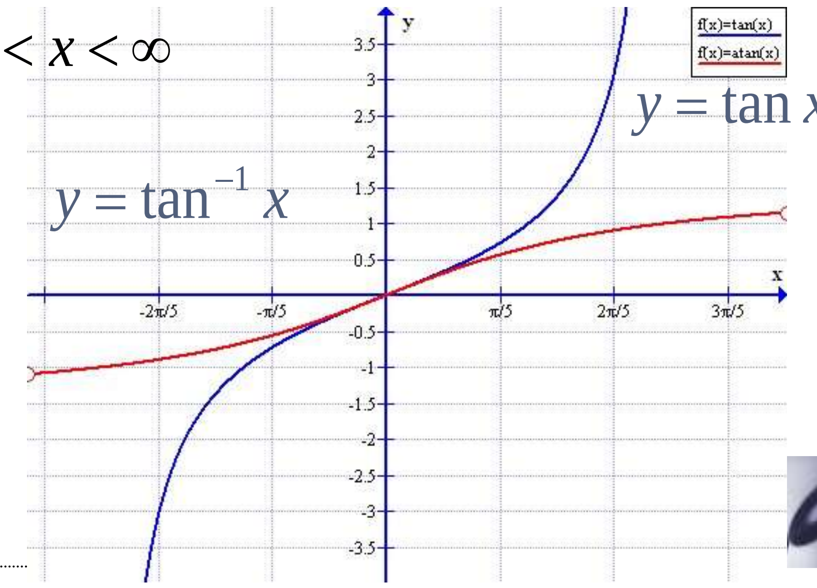
$$y = \cos^{-1} x$$

$$\text{donde } 0 \le y \le \pi \quad , \quad -1 \le x \le 1$$



$$y = \tan^{-1} x$$

$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad -\infty < x < \infty$$



Ejemplo 5

- Resuelva la ecuación en el intervalo $[0,2\pi)$ tal que: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- *Paso 1 - Encuentre el número de referencia*
- Como

$$\frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ó \quad cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

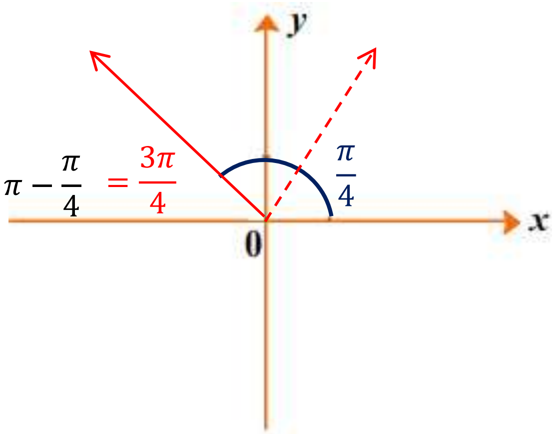
$\frac{\pi}{4}$ es el número de referencia.

- *Paso 2 – Identifique cuadrantes*

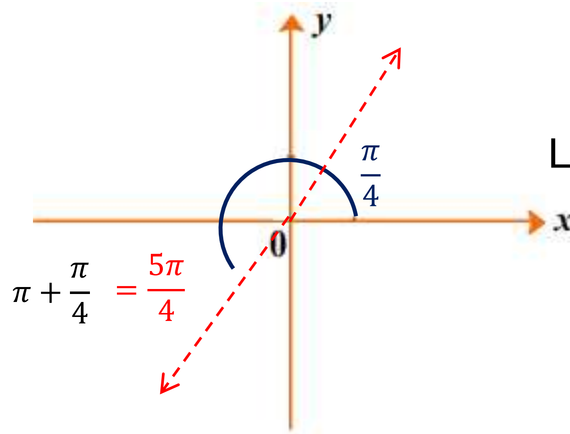
Coseno es negativo en el cuadrante II y III,

- *Paso 3 – Determine soluciones*

En el cuadrante II se calcula así:



En el cuadrante III se calcula así:



Las dos soluciones son:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Ejemplo 6

- Resuelva la ecuación en el intervalo $[0,2\pi)$ tal que: $\cot x = -\,0.458$

$$\tan x = \frac{1}{-0.458}$$

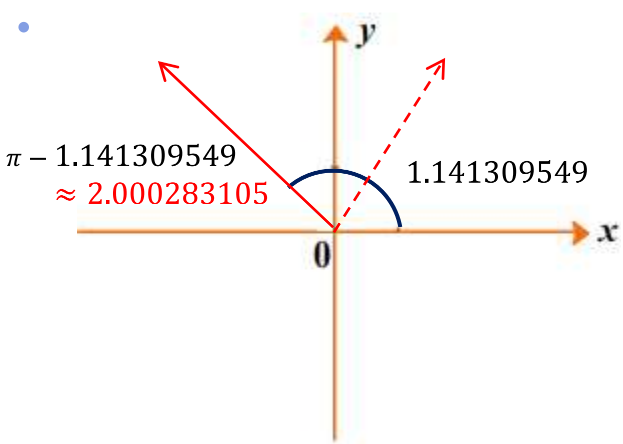
$$\tan x \approx -2.183406114$$

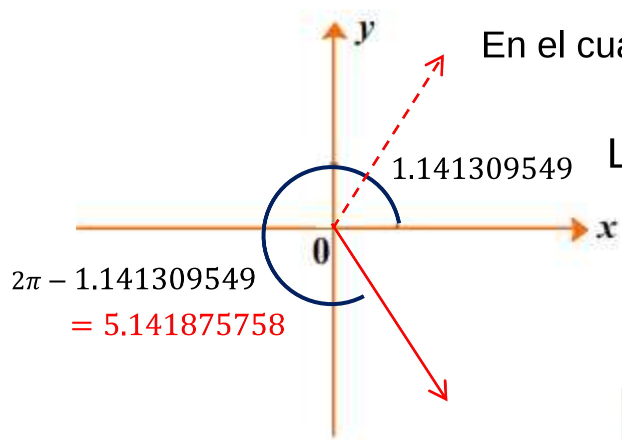
- *Paso 1 - Encuentre el número de referencia*
- Como

$$tan^{-1}(2.18340614\ ) = 1.141309549$$

1.141309549
es el número de referencia.

- *Paso 2 – Identifique cuadrantes*

  Tangente es negativo en el cuadrante II y IV,
- *Paso 3 – Determine soluciones*
- Como el valor trigonomético es positivo, el primero coincide con el número de referencia:1.141309549
- 



En el cuadrante IV:

Las dos soluciones son:

≈ 2.000283105
$y\ 5.141875758$

Ejemplo 7

- Use la calculadora para hallar a la centésima más cercana las soluciones de:

$$\csc x = 3.25$$

$$\frac{1}{\sin x} = 3.25$$

$$\sin x = \frac{1}{3.25}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3.25}\right)$$

0.312766722 es el número de referencia.

Como seno es positivo en el cuadrante I y II, la primera solución es: $x \approx 0.312766722$

La solución en el cuadrante II es:

$$x = \pi - 0.312766722$$

$$\approx 2.828825932$$

Las soluciones entre 0 y 2π redondeada a la centésima más cercana son : $x \approx 0.31,\ 2.83$

Las soluciones generales son : $x \approx 0.31 \pm 2\pi k \quad , \quad 2.83 \pm 2\pi k$

Ejemplo 8 – Despejando por el valor trigonométrico

Resuelva la ecuación: $2\sin\ 3x - 1 = 0$

Solución:

Paso 1 – Despeje por el valor trigonometrico

$$2\sin 3x = 1$$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

Paso 2 – Calcule el número de referencia

$$3x = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$3x = \frac{\pi}{6}$$

Paso 3 – Identifique cuadrantes que coincidan con el signo.

Seno es positivo en el cuadrantes I y II

Paso 4 – Resuelva en el intervalo [0, 2π):

$$3x = \frac{\pi}{6} \qquad 3x = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{18} \qquad 3x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{18}$$

Soluciones en $(-\infty, \infty)$:

$$3x = \frac{\pi}{6} \qquad 3x = \frac{5\pi}{6}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi \qquad 3x = \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{18} \pm \frac{2}{3}k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{18} \pm \frac{2}{3}k\pi$$

Ejemplo 9 - Factorización

Resuelva la ecuación siguiente en el intervalo $[0°, 360°)$:

$$\sin x \tan x = \sin x$$

Solución:

Reuna términos en un lado y factorice:

$$\sin x \tan x - \sin x = 0$$

$$\sin x (\tan x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \text{ó} \qquad \tan x = 1$$

$$x = sin^{-1}(0) \qquad\qquad x = tan^{-1}(1)$$

$$x = 0° \qquad\qquad x = 45°$$

Como seno es 0 en $x = 270°$ es otra solución.

Como tangente es positivo en el cuadrante III, la otra solución es:

$$180° + 45° = 225°$$

Las soluciones son: $0°, 45°, 225°, 270°,$

Ejemplo 10 - Factorización

Resuelva la ecuación siguiente en el intervalo [0, 2π):

$$\tan^2 x + \tan x - 2 = 0$$

Solución:

Despeje la función por factorización o por la formula cuadrática.

$$(\tan x - 1)\ (\tan x + 2) = 0$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{ó} \qquad \tan x = -2$$

$$x = tan^{-1}(1) \qquad\qquad x = tan^{-1}(-2)$$

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \begin{array}{c} Número\ de\ referencia \\ tan^{-1}(2) \approx 1.107148718 \end{array}$$

Como tangente es positiva en el cuadrante I y III, la otra solución es: $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Como tangente es negativa en el cuadrante II y IV, las soluciones aquí serían: $\pi - 1.107148718 = 2.034443936$

$$2\pi - 1.107148718 = 5.176036589$$

Las 4 soluciones son:

$$\{\pi/4, 5\pi/4, 2.034443936\ , 5.176036589\}$$

Ejemplo 11 - Identidades

- Resuelva la ecuación siguiente en el intervalo [0, 2π)

$$\tan x + \sqrt{3} = \sec x$$

Solución:

Eleve al cuadrado

$$\left(\tan x + \sqrt{3}\right)^2 = (\sec x)^2$$

$$tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = sec^2 x$$

se la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.

$$tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 1 + \tan^2 x$$

$$2\sqrt{3}\tan x + 3 = 1$$

$$2\sqrt{3}\tan x = -2$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Número\ de\ referencia\ tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \frac{\pi}{6} \quad (aprox.\ 0.523598776)$$

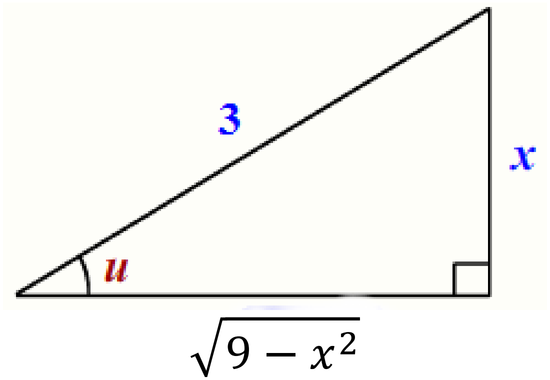
Como tangente es negativa en el cuadrante II y IV, las soluciones son:

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \qquad 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Ejemplo 12

- Si $\sin u = \frac{x}{3}$, exprese $\sin u + \cos u$ en términos x. Asuma $0 < u < \frac{\pi}{2}$.
- Solución:
- Como

$$\sin u = \frac{x}{3}$$



- Por Pitágoras:

$$3^2 = x^2 + y^2$$
$$9 = x^2 + y^2$$
$$y^2 = 9 - x^2$$
$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

- De manera que: $cos\, u = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$

$$\sin \mathrm{u} + cos\, u = \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$